

An introduction to the Lax pairs, the theory of solitons and the inverse scattering transform

Jesús Adrián Espínola Rocha.
Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco

September 5, 2016

Contents

1	Introductory remarks. Basic examples of Lax pairs	3
1.1	The most elementary examples of Lax pairs: the harmonic oscillator .	3
1.2	The Lax equation for ODEs	5
1.3	Solving the harmonic oscillator by the inverse scattering transform . .	6
1.4	The most elementary examples of Lax pairs: the rigid body	10
2	Isospectral transformations	17
2.1	Introduction	18
2.2	Lax's iso-spectral operators	19
3	El Método de Dispersión Inversa.	48
3.1	Invarianza de Galileo.	48
3.2	La transformación de Miura. La ecuación de Schrödinger.	49
3.3	Los Espectros Discretos y Contínuos.	52
3.4	La Invarianza del Espectro en el Tiempo.	55
3.5	Evolución de las Funciones de Onda.	57
3.6	Problemas de Dispersión.	61
3.7	La Expresión Integral para la Función de Onda	62
3.8	Datos de Dispersión.	65
3.9	El Espectro Contínuo: el Coeficiente de Reflexión.	66

3.10	El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios.	70
3.11	La Ecuación de Gel'fand-Levitan.	73
3.12	Evolución Temporal de los Datos de Dispersión.	77
3.13	Esquema del Método de Dispersión Inversa.	81
3.14	Ejemplo.	83
3.15	¿Qué hace el Espectro Continuo?	96
3.16	Apéndice A.	98
3.17	Apéndice B.	99
3.18	Apéndice C.	100
3.19	Apéndice D.	103
4	Bäcklund transforms	104
4.1	Introductory remarks	104
4.2	The most elementary Bäcklund transform	104
4.3	Second order eigenvalues problems and systems of first order equations	106
4.4	Relation between one- and two-component systems and Ricatti equations	107
4.5	General properties of Ricatti equations	108
4.6	Associated Sturm-Liouville equations	109
4.7	Bäcklund transform for the KdV equation	112
	Bibliography	115

Preface

These are a set of notes emerged from a graduate course given during the Fall semester 2015 at the *Escuela Superior de Física y Matemáticas* of the *Instituto Politécnico Nacional*, in México D.F. and for the Second International Symposium on Analysis and its Applications to be held in September 2016, in Metepec, Puebla, México. which will be organized by the Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa.

Introduction

Differential equations is an area of the mathematical sciences which has many many applications. Actually, differential equations arose as the natural attempt to solve

and describe problems in physics first, and nowadays to solve problems in chemistry, biology, all the engineerings and many others areas of human knowledge. Similarly, differential equations can be studied in the perspective of very pure and abstract mathematics. Although the topics covered in these notes are quite abstract, this is not the goal of this work.

Ok, even not all linear differential equations have been exactly solved, or not even all is known about them, most of the theory of linear differential equations is well known since the principle of superposition plays a fundamental part on it. Then, the following step on study differential equations is to consider nonlinear differential equations. The study of this type of differential equations will be the topic of these notes.

Now, differential equations are divided in two main types: ordinary and partial. We center our attention mainly on partial differential equations. Even that ordinary differential equations also describe many phenomena in nature, partial differential equations also arise in many many applications; partial differential equations are the main goal of mathematicians and physicists to describe nature. They describe, to mention just few examples, the propagation of heat, diffusion of chemicals or contaminants, motion of membranes, stream in fluids, electromagnetic fields, electromagnetic waves, waves in water, in strings and in the air.

1 Introductory remarks. Basic examples of Lax pairs

1.1 The most elementary examples of Lax pairs: the harmonic oscillator

The harmonic oscillator

We know that the harmonic oscillator has, as its Hamiltonian

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2,$$

with evolution equations (Hamilton's equations of motion)

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq.\end{aligned}$$

If we define $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= -m\omega^2q.\end{aligned}\tag{1}$$

resulting into the equation for the harmonic oscillator

$$\ddot{q} = -\omega^2q.$$

We also can write

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2.\tag{2}$$

Some authors normalize to $m = 1$, but we will keep here the mass, m , of the particle arbitrary.

The **Lax pair** for the harmonic oscillator is a pair of linear operators (in this instance, matrices) given by:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}; \quad \mathcal{P} = \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\tag{3}$$

References [BBT, Google1, ?]

The **Lax equation** is,

$$\dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0,\tag{4}$$

which, for the case of harmonic oscillator becomes:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\dot{p} & \omega\dot{q} \\ \omega\dot{q} & -\frac{1}{m}\dot{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2q & -\frac{\omega}{m}p \\ -\frac{\omega}{m}p & -\omega^2q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

From this follows

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\dot{p} + \omega^2q &= 0 \\ \omega\dot{q} - \frac{\omega}{m}p &= 0,\end{aligned}$$

which are the Hamilton equations for the harmonic oscillator. And hence $\ddot{q} = -\omega^2q$, which is the equation of the harmonic oscillator.

Computations

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}, \mathcal{P}] &= \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -\omega q \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} -\omega q & \frac{1}{m}p \\ \frac{1}{m}p & \omega q \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 2\omega q & -\frac{2}{m}p \\ -\frac{2}{m}p & -2\omega q \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} \omega q & -\frac{1}{m}p \\ -\frac{1}{m}p & -1\omega q \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.2 The Lax equation for ODEs

Given two linear differential operators, \mathcal{L}, \mathcal{P} , we can consider a system of two differential equations

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}\Psi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{P}\Psi. \quad (6)$$

For ODEs, there is no explicit dependence on x , so we take $\Psi(x, t) = \psi(t)e^{\lambda x}$. Hence, equation (5) becomes $\frac{\partial}{\partial x}(\psi(t)e^{\lambda x}) = \mathcal{L}(\psi(t)e^{\lambda x})$, *i.e.*, $\lambda\psi(t)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}\mathcal{L}\psi(t)$. (The more general case will be done later). Then, system of equations (5)-(6), turns to be

$$\mathcal{L}\psi = \lambda\psi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{P}\psi. \quad (8)$$

This is an over-determined system of equation for ψ . There is a compatibility condition that makes the two equations (7)-(8) to be happy to each other. To this end, we should eliminate the function ψ in this system. Notice that equation (7) is an eigenvalue problem. Differentiate with respect to t ,

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t.$$

Now, using equation (8),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi &= \lambda_t\psi + \lambda\mathcal{P}\psi, \\
&= \lambda_t\psi + \mathcal{P}(\lambda\psi), \quad \text{since } \mathcal{P} \text{ is linear} \\
&= \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi, \quad \text{by equation (7)}
\end{aligned}$$

Hence,

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\mathcal{P}\psi = \lambda_t\psi + \mathcal{P}\mathcal{L}\psi,$$

i.e.,

$$\mathcal{L}_t\psi + (\mathcal{L}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L})\psi = \lambda_t\psi.$$

If this holds for any ψ satisfying (7)-(8),

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = \lambda_t.$$

Therefore,

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_t = 0.$$

Then, the eigenvalues are constants of motion if Lax equation (4) holds.

Theorem. For the linear operators \mathcal{L} and \mathcal{P} that define the system (7)-(8), then the eigenvalues of \mathcal{L} are constants of motion if, and only if, Lax equation

$$\dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, \mathcal{P}] = 0$$

holds.

Next, we will see how to solve the harmonic oscillator using its Lax pair (3).

1.3 Solving the harmonic oscillator by the inverse scattering transform

The initial value problem

We want to solve the initial value problem for the harmonic oscillator

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m}p & q(0) &= q_0, \\ \dot{p} &= -m\omega^2q & p(0) &= p_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Consider the spectral problem (7) at $t = 0$, $\mathcal{L}(0)\psi(0) = \lambda(0)\psi(0)$, *i.e.*,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix} = \lambda(0) \begin{pmatrix} \psi_1^{(0)} \\ \psi_2^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

The eigenvalues

We compute the eigenvalues $\lambda(0)$ by solving the characteristic equation $\det(\mathcal{L}(0) - \lambda(0)I) = 0$,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 - \lambda(0) \end{pmatrix} &= 0 \\ -\left(\lambda(0) + \frac{1}{m}p_0\right) \left(\lambda(0) - \frac{1}{m}p_0\right) - \omega^2 q_0^2 &= 0 \\ \lambda^2(0) - \frac{1}{m^2}p_0^2 - \omega^2 q_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

which is the characteristic equation. The solutions to this equation are the eigenvalues of the problem and, since we know they are time-independent,

$$\lambda_{1,2} \equiv \lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0) = \pm \sqrt{\frac{p_0^2}{m^2} + \omega^2 q_0^2}.$$

Now, using the characteristic equation,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\frac{p_0^2}{m^2} + 2\omega^2 q_0^2,$$

i.e.,

$$\frac{m}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2.$$

Hence, $\text{Energy}(0) = \frac{m}{4}\text{Tr}(\mathcal{L}^2(0))$. Similarly, $\text{Energy}(t) = \frac{m}{4}\text{Tr}(\mathcal{L}^2(t))$. Since the λ 's are conserved, $\text{Tr}(\mathcal{L}^2(t)) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{Tr}(\mathcal{L}^2(0))$. And so,

$$\text{Energy}(t) = \frac{m}{4}\text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

Hence, the Hamiltonian is conserved,

$$H(q, p) = \frac{m}{4}\text{Tr}(\mathcal{L}^2(0)).$$

The eigenvectors

We have to solve the system (10) at $\lambda(0) = \lambda_j$ (with $j = 1, 2$),

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 - \lambda_j & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 - \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1,j}^{(0)} \\ \psi_{2,j}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The two equations are equivalent (because of the determinant is 0). Hence, the first equations is

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m}p_0 - \lambda_j\right) \psi_{1,j}^{(0)} + \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)} &= 0, \\ \left(\lambda_j - \frac{1}{m}p_0\right) \psi_{1,j}^{(0)} &= \omega q_0 \psi_{2,j}^{(0)}, \end{aligned}$$

i.e., the eigenvectors are

$$\vec{\psi}_{1,2}^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega q_0 \\ \lambda_{1,2} - \frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix}$$

We then have the eigenset $(\lambda_{1,2}, \vec{\psi}_{1,2}^{(0)})$. We wish to compute the evolution in time of the eigenset. This will help us to compute $\mathcal{L}(t)$, which contains $q(t), p(t)$, solutions to the harmonic oscillator.

We already know the evolution in time of the eigenvalues $\lambda_{1,2}(t) = \lambda_{1,2}(0)$, since they are constants of motion. To find $\vec{\psi}_{1,2}(t)$, we will make use of equation (8)

$$\frac{\partial \vec{\psi}_j}{\partial t} = \mathcal{P} \vec{\psi}_j \quad \Longrightarrow \quad \vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t} \vec{\psi}_j(0), \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

We now need to compute $e^{\mathcal{P}t}$. This is an easy task since \mathcal{P} is a constant matrix:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{\mathcal{P}t} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

with $\theta = \frac{1}{2}\omega t$. Notice that $e^{\mathcal{P}t} = U(t)$ is a unitary matrix: $U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I$.

Computations

The matrix \mathcal{P} has eigenvalues $\mu_{1,2} = \pm \frac{1}{2}i\omega$ and matrix of eigenvectors $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, with inverse matrix $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. If $M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$, then $e^{Mt} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \end{pmatrix}$ and so, $e^{\mathcal{P}t} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) e^{Mt} (\vec{v}_1, \vec{v}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, which is the matrix in (12).

We now know how is the evolution in time of the eigenvalues and eigenvectors, $\lambda_j(t) = \lambda_j(0)$ $\vec{\psi}_j(t) = e^{\mathcal{P}t} \vec{\psi}_j(0)$ ($j = 1, 2$), of the matrix \mathcal{L} and we also know that the equation

$$\mathcal{L}(t) \vec{\psi}_j(t) = \lambda_j(0) \vec{\psi}_j(t), \quad (13)$$

holds; but we ignore what $\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p & \omega q \\ \omega q & -\frac{1}{m}p \end{pmatrix}$ is, which contains the solution to our problem.

How to find $\mathcal{L}(t)$? We proceed as follows. Substitute equation (11) into equation (13),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t)\vec{\psi}_j(t) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(t), \\ \mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)U(t)\vec{\psi}_j(0), \\ U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t)\vec{\psi}_j(0) &= \lambda_j(0)\vec{\psi}_j(0).\end{aligned}$$

Evaluate equation (13) at $t = 0$ and compare with previous equation. We observe that

$$U^{-1}(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0),$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(t) = U(t)\mathcal{L}(0)U^{-1}(t).$$

- (i) Notice that we have "dressed" the initial operator $\mathcal{L}(0)$ to get the time-evolved operator $\mathcal{L}(t)$! (This is not the *dressing method*, but a similar idea is behind it).
- (ii) Also notice that, since $U(t)$ is unitary, then the spectrum of $\mathcal{L}(0)$ and $\mathcal{L}(t)$ is the same! Consequently, the eigenvalues $\lambda(t)$ of $\mathcal{L}(t)$ are time-independent

$$\lambda(t) = \lambda(0),$$

which already has been proved.

Hence:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m}p_0 & \omega q_0 \\ \omega q_0 & -\frac{1}{m}p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta & \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \frac{p_0}{m} 2 \cos \theta \sin \theta + \omega q_0(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & -\frac{p_0}{m}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \omega q_0 2 \cos \theta \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos 2\theta - \omega q_0 \sin 2\theta & \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta \\ \frac{p_0}{m} \sin 2\theta + \omega q_0 \cos 2\theta & -\frac{p_0}{m} \cos 2\theta + \omega q_0 \sin 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{L}(t) = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{m} \cos(\omega t) - \omega q_0 \sin(\omega t) & \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) \\ \frac{p_0}{m} \sin(\omega t) + \omega q_0 \cos(\omega t) & -\frac{p_0}{m} \cos(\omega t) + \omega q_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

since we defined $\theta = \frac{1}{2}\omega t$. Using the definition of $\mathcal{L}(t)$, equation (3) and comparing with equation (14), we obtain the solution to the harmonic oscillator

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega q_0 \sin(\omega t), \\ q(t) &= \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t) + q_0 \cos(\omega t). \end{aligned}$$

We see that Hamilton's equations $\dot{q} = \frac{p}{m}$ and $\dot{p} = -m\omega^2 q$, are satisfied. This is the way we solve the harmonic oscillator using the Lax pair formalism.

1.4 The most elementary examples of Lax pairs: the rigid body

The rigid body

Assume a rotating rigid body with angular velocity $\vec{\Omega}$ has an *angular momentum* \vec{L} . The equation of motion is:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

In component-wise,

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 L_3 - \Omega_3 L_2 \\ -(\Omega_1 L_3 - \Omega_3 L_1) \\ \Omega_1 L_2 - \Omega_2 L_1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

These equations can also be written in matrix form as follows. Let be the matrices,

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

This is the Lax pair of the rigid body. Computing:

$$\begin{aligned} \hat{L}\hat{\Omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Omega_1 L_1 + \Omega_2 L_2 & -\Omega_2 L_3 & -\Omega_1 L_3 \\ -\Omega_3 L_2 & \Omega_1 L_1 + \Omega_3 L_3 & -\Omega_1 L_2 \\ -\Omega_3 L_1 & -\Omega_2 L_1 & \Omega_2 L_2 + \Omega_3 L_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}\hat{L} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_1\Omega_1 + L_2\Omega_2 & -L_2\Omega_3 & -L_1\Omega_3 \\ -L_3\Omega_2 & L_1\Omega_1 + L_3\Omega_3 & -L_1\Omega_2 \\ -L_3\Omega_1 & -L_2\Omega_1 & L_2\Omega_2 + L_3\Omega_3 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

we can compute the commutator

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & L_2\Omega_3 - \Omega_2L_3 & L_1\Omega_3 - \Omega_1L_3 \\ L_3\Omega_2 - \Omega_3L_2 & 0 & L_1\Omega_2 - \Omega_1L_2 \\ L_3\Omega_1 - \Omega_3L_1 & L_2\Omega_1 - \Omega_2L_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Using equation (15)

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{L}_1 & \dot{L}_2 \\ \dot{L}_1 & 0 & -\dot{L}_3 \\ -\dot{L}_2 & \dot{L}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Therefore,

$$[\hat{L}, \hat{\Omega}] = \dot{\hat{L}}.$$

This is to say, we can write the equations of motion of the rigid body as a commutator of its Lax pair. This means that the rigid body is also integrable.

The eigenvalues of \hat{L} . Conserved quantities.

The characteristic equation of \hat{L} is computed as usual, $P(\lambda) = \det(\hat{L} - \lambda I)$. Hence,

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda_1 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & -\lambda_2 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 + L_3^2) - (-L_1)(-L_1\lambda - L_2L_3) + L_2(L_1L_3 - L_2\lambda) \\ &= -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2) - (L_1L_2L_3) + (L_1L_2L_3).\end{aligned}$$

I.e.,

$$P(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda(L_3^2 + L_1^2 + L_2^2).$$

The zeroes of the characteristic polynomial $P(\lambda) = 0$ are the eigenvalues of \hat{L} , $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm i\|\vec{L}\|$.

Notice that $\text{Tr } \hat{L} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, which is a trivial conserved quantity. Also $\text{Tr } \hat{L}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = -2\|\vec{L}\|^2$. This means that the magnitude of the angular momentum is conserved. There are no more conserved quantities out of this setting ($\text{Tr } \hat{L}^3 = 0$, $\text{Tr } \hat{L}^4 = 2\|\vec{L}\|^4$, which are repeated quantities).

Now, using a change of variables, we can write the equations of the rigid body with a different Lax pair. To see this, we will push back to the motion of a rigid body and the rotation of a particle.

Angular velocity

The **angular velocity** $\vec{\omega}$ is a vector perpendicular to the plane of rotation of a particle, which rotates to an angular velocity (a scalar!) $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$, where $\theta = \theta(t)$ is the angular position of the particle at time t . Also, $\omega = \|\vec{\omega}\|$. It also follows the right-hand rule. See figure 1.

The angular momentum and the inertia tensor

The **angular momentum** (as opposed to the linear momentum) of a rotating particle is denoted by \vec{L} and defined by

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p},$$

where \vec{r} is the position of the particle and $\vec{p} = m\vec{v}$ is its linear momentum. The relation between angular velocity and the velocity of the particle is given by

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v},$$

and it follows the right-hand-rule as well. See figure 3.

Observe that $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$, *i.e.*,

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

In the same vein of ideas, $\vec{p} = m\mathbb{R}$ is a linear transformation $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ with $\vec{v} \mapsto \vec{p}$, *i.e.*, $\vec{f}(\vec{v}) = m\vec{v} = \vec{p}$. Here, m is the constant of proportionality. This is to say, the transformation is a multiplication operation.

Now, for the angular momentum, we have that $L = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ is also a linear transformation that takes $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, with $\vec{\omega} \mapsto \vec{L}$ *i.e.*, $\vec{F}(\vec{\omega}) = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{L}$.

Since every linear transformation can be represented by a matrix, we have

$$\vec{F}(\vec{\omega}) = \tilde{I}\vec{\omega}, \quad \text{i.e.,} \quad \vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega},$$

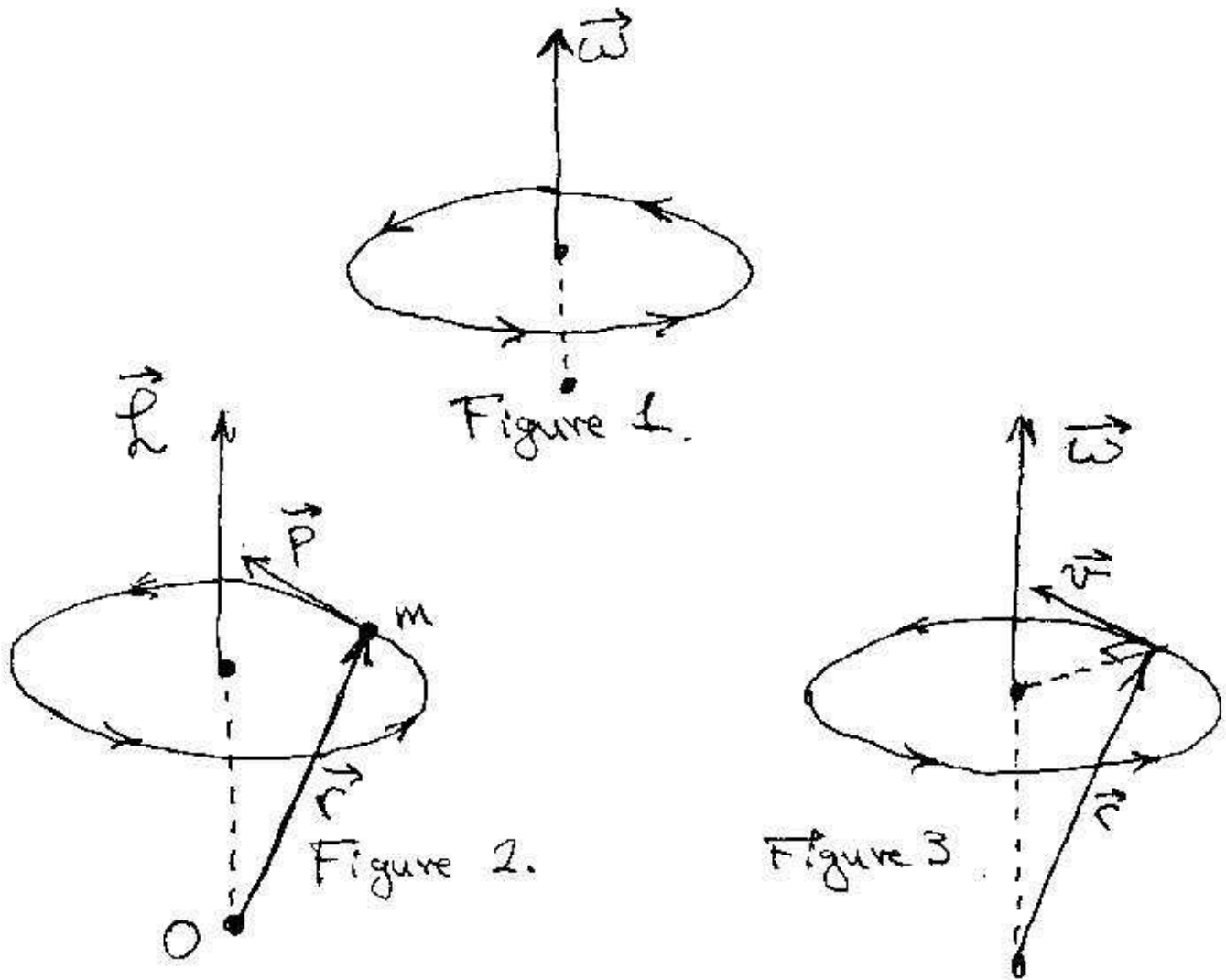


Figure 1: The angular momentum

where \tilde{I} is a matrix (a tensor) called the **momentum of inertia** of the rotating particle (or the **inertia operator**, or the **inertia tensor**).

Notice that, as we have $\vec{p} = m\vec{v}$ and $\vec{L} = \tilde{I}\vec{\omega}$, \tilde{I} plays the role of an "angular mass" of the rotating particle, in the same role the mass plays in the linear momentum. Also notice that the momentum of inertia \tilde{I} depends on m and \vec{r} .

Claim. The inertia tensor is symmetric.

Proof. If (\cdot, \cdot) denotes the standard inner product in \mathbb{R}^3 , we should prove that

$$(\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) = (\vec{\omega}_1, \vec{F}(\vec{\omega}_2)), \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^3.$$

We have:

$$\begin{aligned} (\vec{F}(\vec{\omega}_1), \vec{\omega}_2) &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \vec{\omega}_2) \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega}_2 \\ &= m((\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \times \vec{\omega}_2) \cdot \vec{r} \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \quad (\text{here we see it is symmetric}) \\ &= m(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}, \vec{\omega}_1 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}, \vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \quad (\text{since the inner product is symmetric}) \\ &= m(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \\ &= m(\vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}), \vec{\omega}_1), \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{r} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})), \quad (\text{since the inner product is symmetric}) \\ &= m(\vec{\omega}_1, \vec{F}(\vec{\omega}_2)), \end{aligned}$$

i.e., \vec{F} is symmetric, so the inertia tensor, \tilde{I} . *End of the proof.*

Since the inertia tensor \tilde{I} is symmetric, then it is diagonalizable. If we are in the reference frame where \tilde{I} is diagonal, we have:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{F}(\vec{\omega}), \quad \text{where } I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

and the kinetic energy becomes,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2.$$

Claim. The kinetic energy is

$$K = \frac{1}{2}(\tilde{I}\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}(I\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \tilde{\omega}_i^2,$$

where $\tilde{\omega} = P\vec{\omega}$ is the angular velocity in the reference frame of diagonal inertia tensor, I , and P is the matrix of eigenvectors of the inertia tensor.

Proof. $K = \frac{1}{2}m(\vec{v}, \vec{v}) = \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2}m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{1}{2}(\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = (\tilde{I}\vec{\omega}, \vec{\omega}) = (P^{-1}IP\vec{\omega}, \vec{\omega}) = (IP\vec{\omega}, P\vec{\omega}) = (I\tilde{\omega}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \tilde{\omega}_i^2$. *End of the proof.*

Now, out the kinetic energy, we will find the expression of the momentum of inertia, \tilde{I} .

Since the kinetic energy is $K = \frac{1}{2}(\tilde{I}\vec{\omega}, \vec{\omega})$, then,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}(\vec{F}(\vec{\omega}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2}(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{\omega}) = \frac{m}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= \frac{m}{2} \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|^2 \\
&= \frac{m}{2} (\|\vec{\omega}\|^2 \|\vec{r}\|^2 - |\vec{\omega} \cdot \vec{r}|^2) \\
&= \frac{m}{2} \left(\sum_i \omega_i^2 \sum_i r_i^2 - \left(\sum_i \omega_i r_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{m}{2} \left(\sum_i \omega_i^2 \sum_j r_j^2 - \left(\sum_i \omega_i r_i \right) \left(\sum_j \omega_j r_j \right) \right) \\
&= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i^2 r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\
&= \frac{m}{2} \sum_{i,j} (\omega_i \omega_j \delta_i^j r_j^2 - \omega_i \omega_j r_i r_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j (m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j)),
\end{aligned}$$

and comparing with $K = \frac{1}{2}(\tilde{I}\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \tilde{I}_{i,j}$, we find that

$$\tilde{I}_{i,j} = m (\delta_i^j r_j^2 - r_i r_j)$$

are the components of the inertia tensor.

Return to the Lax pairs

We already learnt that the equations of motion for the rigid body are

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

where

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & -L_1 & L_2 \\ L_1 & 0 & -L_3 \\ -L_2 & L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_1 & 0 & \Omega_3 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

It can be defined a new Lax pair in the following way:

$$\hat{L}(\lambda) = \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}, \quad \text{and} \quad \hat{M}(\lambda) = \lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega},$$

where

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 + I_2 - I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 + I_3 - I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 + I_3 - I_1 \end{pmatrix},$$

(assuming $I_i \neq I_j$ for $i \neq j$) and λ being the spectral parameter.

We can verify that

$$\begin{aligned} \mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_1 I_1 & -\Omega_2 I_2 \\ -\Omega_1 I_1 & 0 & \Omega_3 I_3 \\ \Omega_2 I_2 & -\Omega_3 I_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & L_1 & -L_2 \\ -L_1 & 0 & L_3 \\ L_2 & -L_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{in the principal inertia axis} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\mathcal{I} \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \mathcal{I} = \hat{L}, \tag{16}$$

in the reference frame of the pincipal axis of the inertia tensor.

Claim. The equations

$$\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}] \quad \text{and} \quad \frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

are equivalent.

Proof. Assume that

$$\frac{d\hat{L}(\lambda)}{dt} = [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)]$$

holds. Then,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L} \right), \quad \text{since } \mathcal{I} \text{ is constant,} \\
&= \frac{d}{dt} \left(\hat{L}(\lambda) \right), \quad \text{by the definition of } \hat{L}(\lambda), \\
&= [\hat{M}(\lambda), \hat{L}(\lambda)] \quad \text{by hypothesis,} \\
&= [\lambda \mathcal{I} + \hat{\Omega}, \mathcal{I}^2 + \frac{1}{\lambda} \hat{L}] \\
&= \lambda [\mathcal{I}, \mathcal{I}^2] + [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}], \\
&= [\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] + \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}]. \tag{17}
\end{aligned}$$

Now observe that,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{I}, \hat{L}] + [\hat{\Omega}, \mathcal{I}^2] &= \mathcal{I}\hat{L} - \hat{L}\mathcal{I} + \hat{\Omega}\mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2\hat{\Omega} \\
&= \mathcal{I}(\mathcal{I}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\mathcal{I}) - (\mathcal{I}\hat{\Omega} + \hat{\Omega}\mathcal{I})\mathcal{I} + \hat{\Omega}\mathcal{I}^2 - \mathcal{I}^2\hat{\Omega}, \quad \text{by equation (16)} \\
&= \mathcal{I}(\hat{\Omega}\mathcal{I}) - (\mathcal{I}\hat{\Omega})\mathcal{I}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hence, from (17),

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\hat{L}}{dt} = \frac{1}{\lambda} [\hat{\Omega}, \hat{L}],$$

and so $\frac{d\hat{L}}{dt} = [\hat{\Omega}, \hat{L}]$, as we wanted to prove. Proceeding backwards, we obtain the implication in the opposite direction. *End of the proof.*

Then, the eigenvalues of $\hat{L}(\lambda)$ are constants of motion and so

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\hat{L}^2(\lambda)) &= \text{Tr}(\mathcal{I}^4 - \frac{2}{\lambda} \hat{L}^2), \\
\text{Tr}(\hat{L}^4(\lambda)) &= \text{Tr}(\mathcal{I}^6 - \frac{3}{\lambda^2} (\text{Tr } \mathcal{I})^2 \hat{L}^2 - I_1 I_2 I_3 H),
\end{aligned}$$

are conserved quantities and where H represents the Hamiltonian,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{I_i^2}.$$

2 Isospectral transformations

This chapter is mainly based on the following three sources: [Fla] H. Flaschka, *Notes on Soliton theory*, [L1] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions*

and solitary waves. CPAM **XXI**. 467-490 (1968), and [L2] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. CPAM **XXVIII**. 141-188 (1975).

2.1 Introduction

Let

$$\mathcal{L}(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$$

be the Schrödinger operator with $u(x, t)$ being some periodic (or non-periodic) potential (with period ∞ , respectively) and $\mathcal{L}(t)$ acting on periodic (or non-periodic in $L^2(\mathbb{R})$, resp.) functions. We assume that $\mathcal{L}(t)$ has a discrete spectrum

$$\sigma_{\text{point}}(\mathcal{L}(t)) = \{\lambda_i\}_{i=1}^N \quad (18)$$

and we assume it is finite.

Given the potential $u(x, t)$ the the eigenvalues are completely determined. The converse is not true. Given the eigenvalues, the operator $\mathcal{L}(t)$ is **not** uniquely determined, since several operators may have the same spectrum.

In particular, if $u(x, t)$ solves the Korteweg-deVries (KdV) equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (19)$$

with (periodic or non-periodic) initial conditions $u(x, 0)$, then the operators

$$\mathcal{L}(0) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, 0), \quad (20)$$

$$\mathcal{L}(t) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t), \quad (21)$$

have the same spectrum, $\lambda(0) = \lambda(t)$.

- This is to say, the operator $\mathcal{L}(t)$ is iso-spectral, as long as $u(x, t)$ satisfies the KdV equation [GGKM].
- in 1968, P. Lax [L1] found a way to construct iso-spectral operators; *i.e.*, found a way to generate an infinite sequence of differential equations whose solutions have the property that $\mathcal{L}(0)$ and $\mathcal{L}(t)$ are iso-spectral.
- C. Gardner identified this set of equations as a generalized set of KdV equations (see section 5 in P. Lax [L2]).

We reproduce these results here.

2.2 Lax's iso-spectral operators

Let $\mathcal{L}(t)$ be a one-parameter family of self-adjoint operators (in more generality, self-adjointness is not required) in a Hilbert space. The eigenvalues and the spectrum, in the self-adjoint case, are real. For details, check [L1, L2].

Claim 2.1. *The spectrum of $\mathcal{L}(t)$ is time independent (t -independent), if the operators $\mathcal{L}(t)$ are unitarily equivalent to each other; i.e., if there exists a one-parameter family of unitary operators $U(t)$ such that*

$$U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Proof. It is a well-known fact of linear algebra and functional analysis that the spectrum of $\mathcal{L}(t)$ and $\mathcal{L}(0)$ coincide:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(0) - \lambda I &= U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) - \lambda U^*(t)U(t) \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)U(t). \end{aligned}$$

If $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t))$, then $\mathcal{L}(t) - \lambda I$ is invertible, with inverse $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$. Now,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1} &= (U(t))^{-1}(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}(U^*(t))^{-1} \\ &= U^*(t)(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}U(t), \end{aligned}$$

since $U(t)$ is unitary: $U(t)U^*(t) = U^*(t)U(t) = I$. Since $(\mathcal{L}(t) - \lambda I)^{-1}$ exists, then $(\mathcal{L}(0) - \lambda I)^{-1}$ exists, and so

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

This is a "if, and only if" argument. Then,

$$\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{L}(t)) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(\mathcal{L}(0)),$$

i.e.,

$$\sigma(\mathcal{L}(t)) = \sigma(\mathcal{L}(0)).$$

Q.E.D.

Assume both, $\mathcal{L}(t)$ and $U(t)$ are differentiable with respect to t . Hence, differentiating $U(t)U^*(t) = I$,

$$\begin{aligned}\dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) &= 0 \\ \dot{U}(t)U^*(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t) \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)(U^*(t))^{-1} \\ \dot{U}(t) &= -U(t)\dot{U}^*(t)U(t) \\ \text{or } \dot{U}^*(t) &= -U^*(t)\dot{U}(t)U^*(t).\end{aligned}\tag{23}$$

Define

$$B(t) \equiv \dot{U}(t)U^*(t).\tag{24}$$

Then,

$$B^*(t) \equiv U(t)\dot{U}^*(t).\tag{25}$$

Substitute (24) and (25) into (23) to get

$$B(t) = -B^*(t),$$

i.e., B is an **anti-symmetric** operator (of anti-hermitean, or skew-symmetric).

Now, from the definition of $B(t)$, and $U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I$, and from equation (24), $\dot{U}(t)U^*(t) = B(t) \Rightarrow \dot{U}(t)U^*(t)U(t) = B(t)U(t)$ and so:

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t).\tag{26}$$

Conversely, given $B(t)$ we can prove there is an operator $U(t)$ such that

1. $\dot{U}(t) = B(t)U(t)$, and
2. $U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0)$.

Indeed, solving the initial value problem,

$$h_t(t) = B(t)h(t), \quad h(t_0) = h_0,\tag{27}$$

(h is a vector), set

$$h(t) \equiv U(t)h(0).$$

The operation is isometric for $U(t)$ unitary:

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_2^2 &= (h(t), h(t)) = (U(t)h(0), U(t)h(0)) = (U^*(t)U(t)h(0), h(0)) \\ &= (h(0), h(0)) = \|h(0)\|_2^2.\end{aligned}$$

If for every t_0 , equation (27) can be solved for a dense set of h_0 , then $U(t)$ and its inverse are densely defined. Therefore, the closure is unitary.

Since $h_t(t) = B(t)h(t)$ and $U(t)h(0) = h(t)$, then $\dot{U}h_0 = \dot{h} = B(t)h(t) = BUh_0$, and so,

$$\dot{U}(t) = B(t)U(t).$$

Now, conjugating the previous equation, $(\dot{U})^* = (BU)^* = U^*B^* = -U^*B$. Multiplying by U from the left,

$$U\dot{U}^* = -UU^*B. \quad (28)$$

Conjugate the last expression $\dot{U}U^* = -B^*UU^*$ and, since B is anti-symmetric,

$$\dot{U}U^* = BUU^*. \quad (29)$$

Adding term to term the previous two equations (equations (28) and (29)), we get $U\dot{U}^* + \dot{U}U^* = -UU^*B + BUU^*$, *i.e.*,

$$\frac{d}{dt}(UU^*) = BUU^* - UU^*B.$$

If the operator U would be unitary, $UU^* = I$, \Rightarrow last equation holds.

On the other hand, $U_t = BU \Rightarrow U(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) U(t_0) \Rightarrow U^*(t) = U^*(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t B^*(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) = U^*(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) = U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t B(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) = U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t)$, where we have used the fact that B is skew-hermitean. Hence, $U^*(t) = U^*(t_0)U(t_0)U^{-1}(t) \Rightarrow U^*(t)U(t) = U^*(t_0)U(t_0)$. Choose $U(t_0) = I$, to get,

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I,$$

i.e., U is clearly unitary. Then, $\dot{U} = BU \Rightarrow \dot{U}U^* = B$, and the closure is unitary.

Now differentiate (22) with respect to t

$$\begin{aligned} (U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t))_t &= (\mathcal{L}(0))_t \\ \dot{U}^*\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}\dot{U} &= 0 \\ -(U^*B)\mathcal{L}U + U^*\dot{\mathcal{L}}U + U^*\mathcal{L}BU &= 0 \quad \text{by equation (26) and } B^* = -B. \\ U^*(-B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B)U &= 0 \\ -B\mathcal{L} + \dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}B &= 0. \end{aligned}$$

Hence,

$$\dot{\mathcal{L}} + [\mathcal{L}, B] = 0, \quad (30)$$

where $[\mathcal{L}, B] = \mathcal{L}B - B\mathcal{L}$ is the commutator of \mathcal{L} and B . Equation (30) is known as **Lax's equation**.

Going backwards, equation (30) implies (22), as we wanted to show. This proves the following theorem due to P. Lax [L1, L2]

Theorem 2.1. *Let be $\mathcal{L}(t)$ a one-parameter family of self-adjoint operators. Suppose that (30) holds and that (27) can be solve for a dense set in the vicinity of h_0 . Then, the operators $\mathcal{L}(t)$ are unitary equivalents.*

Let apply this theorem to \mathcal{L} , the Schrödinger operator, equation (21). In this case $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, so that equation (30) becomes,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B\mathcal{L} - \mathcal{L}B \quad (31)$$

This equation can be generalized for a countable set of operators B_m .

Generalized KdV equations and their Lax's pairs

The operator

$$B_m = \partial_x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{m-1} b_j^{(m)} \partial_x^{2j+1} + \partial_x^{2j+1} b_j^{(m)},$$

generates a hierarchy of equations [L1, L2, Dra],

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = B_m \mathcal{L} - \mathcal{L} B_m,$$

but we will work on them later soon.

In the same vain of ideas, we will see these equations can be written in variational form as

$$u_{t_m} = c_m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\delta F_m}{\delta u} \right),$$

where $F_m[u]$ are conserved quantities of

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = B_1 \mathcal{L} - \mathcal{L} B_1,$$

and they are expressed as

$$F_m[u] = \int_0^x p_m d\tilde{x},$$

where P_m is a polynomial in u and its derivatives up to order m . For $m = 0, 1$, and 2 , we get

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_1} &= 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\end{aligned}\tag{32}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = -30u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 20 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u}{\partial x^5},\tag{33}$$

and they are the first three elements of the KdV Lax' hierarchy. The corresponding conserved quantities are

$$\begin{aligned}T_1[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \\ T_2[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 dx, \\ T_3[u] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 21u^5 + 105u^2 u_x^2 + 21u u_{xx}^2 + \frac{3}{2} u_{xxx}^2 dx.\end{aligned}$$

We will see later how one can generate these conserved quantities $T_n[u]$ functionals of u and, consequently, can generate equations (32). By the moment, we continue the study of Lax's pairs at first glance.

Lax's equations: colloquially

This and subsequent sections are supported on [Fla].

We will study some examples of finite- (as well as infinite-) -dimensional equations. All of them will have in common the equation

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],\tag{34}$$

where \mathcal{L} and B are differential operators (\mathcal{L} is in a Lie algebra or a dual of one, according to Flaschka [Fla]).

This equation, (34) is called **Lax equation**. We have that

- it has very special properties,

- lead to Hamiltonian mechanics
- integrable Hamiltonian mechanics
- relation between solvable equations with spectral theory and algebraic geometry.

Colloquially. Let us do some concrete examples. Take $\mathcal{L}, B \in M^{n \times n}$ and consider equation (34). Compute

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^2)_t &= \dot{\mathcal{L}}\mathcal{L} + \mathcal{L}\dot{\mathcal{L}}, & (\mathcal{L} \text{ and } \dot{\mathcal{L}} \text{ do not always commute}) \\
&= [B, \mathcal{L}]\mathcal{L} + \mathcal{L}[B, \mathcal{L}], \\
&= (B\mathcal{L} - \mathcal{L}B)\mathcal{L} + \mathcal{L}(B\mathcal{L} - \mathcal{L}B), \\
&= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}B\mathcal{L} + \mathcal{L}B\mathcal{L} - \mathcal{L}^2B, \\
&= B\mathcal{L}^2 - \mathcal{L}^2B, \\
&= [B, \mathcal{L}^2].
\end{aligned}$$

In general,

$$(\mathcal{L}^k)_t = [B, \mathcal{L}^k], \quad \forall k \geq 1. \quad (35)$$

From linear algebra, $\text{Tr}[A, B] = 0$, always. Hence, $\text{Tr}(\mathcal{L}^k)_t = \text{Tr}[B, \mathcal{L}^k] = 0$.

$$\text{Tr} \mathcal{L}^k = \text{constant in } t, \quad \forall k \geq 1. \quad (36)$$

Therefore, Lax equations (34) has a bunch of constants of motion, $\text{Tr} \mathcal{L}^k$.

Now, by Cayley-Hamilton theorem, $\mathcal{L}^{n+1} = c_n\mathcal{L}^n + \dots + c_1\mathcal{L} + c_0$, (c_0 is an $n \times n$ matrix), so that $\text{Tr} \mathcal{L}^{n+1} = c_n\text{Tr} \mathcal{L}^n + \dots + c_1\text{Tr} \mathcal{L} + \text{Tr} c_0$, hence, at most n of these constants of motion are independent.

Suppose now \mathcal{L} is diagonalizable. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ be its eigenvalues. Then, by equation (36),

$$\lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k = \text{constant in } t, \quad \forall k \geq 1. \quad (37)$$

It is clear from (37) that $\lambda_i(t) = \lambda_i(0)$, $i = 1, \dots, n$, *i.e.*, λ_i is independent of time, *i.e.*, λ_i is a constant of motion ($i = 1, \dots, n$)

This is true. For each $k = 1, \dots, n$, we have an equation with n unknowns $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Then, for all k , we have a system of n equations and N unknowns (a nonlinear system of equations, actually). This system can, in principle, be inverted. Since the non-homogeneous term is t -independent, each λ_i is also independent of t . This leads to the original and fundamental idea of Peter Lax.

Theorem 2.2 (Lax (1968)[L1]). *If the matrix function $\mathcal{L}(t)$ satisfies a differential equation of the form*

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],$$

then the spectrum of $\mathcal{L}(t)$ is independent of time.

We say the matrix \mathcal{L} is *deformed* as t changes, but the spectrum remains the same. That is why this change in \mathcal{L} is called an **iso-spectral transformation**. Examples will be given with differential operators acting on Hilbert spaces, \mathcal{H} .

Questions on Lax equations

A list of questions about Lax equations is now set to have in mind during this course.

1. **When can a given differential equation be written in Lax form?** If we have an equation $\dot{x} = f(x)$ the problem is to find a pair of matrices (or operators) (Lax's pair) \mathcal{L}, B such that

$$\dot{x} = f(x) \iff \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}],$$

Then, we have many properties of $\dot{x} = f(x)$.

Equivalently, when can a differential equation be solved exactly? This is a very hard, unanswered (and very likely to be unanswered) question.

2. **Given a differential equation, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, is it Hamiltonian?** Once an equation is known to be Hamiltonian, there is an insight if it could be solvable or not. Most Lax equations turn to be Hamiltonian on dual Lie algebras (or coadjoint orbits), but there is not always (a straight way, a recipe) to do it.
3. **Given that $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ is Hamiltonian and that the eigenvalues of \mathcal{L} are constants of motion, are they in involution? Are these enough to integrate the problem?**
4. **Given that $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ can be solved "in principle", how does one find the solution in practice?** This is the question that leads us to Riemann surfaces, inverse spectral problems and many good mathematics.
5. **Given the explicit solution, how does one extract information?** *Solution:* Integral form, complicated function (many variables Jacobi *theta* function.) It is not trivial to deduce information and qualitative or quantitative properties from messy formulas.

→ Actually, to solve this question is what differentiate a "pure" mathematician from an "applied" mathematician.

6. **What else is going on?** Once we have answered the previous questions:

- a) Similarities with other Lax equations?
- b) other fields of mathematics?
- c) unexplained geometrical "symmetries"?
- d) unexplained calculational "symmetries"?

These questions open new perspectives insolvable equations and in mathematics.

Lax's equations: Ordinary differential equations

Example 2.1. The 2×2 Lax equation. Let \mathcal{L} be a 2×2 trace zero matrix,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

Take

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Hence, from Lax equation $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, we obtain

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b + \beta d - \beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c - \gamma d + \gamma a + \delta c, \\ \dot{d} &= -c\beta + \gamma b. \end{aligned}$$

Now, we know by our previous argument that $\text{Tr} \mathcal{L} = a + d$ is constant in time (this coincides with the first and last in the previous set of equations). We can set the constant to be zero: $\text{Tr} \mathcal{L} = a + d = 0 \Rightarrow d = -a$. Hence,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

and

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \beta c - \gamma b, \\ \dot{b} &= \alpha b - 2\beta a - \delta b, \\ \dot{c} &= -\alpha c + 2\gamma a + \delta c. \end{aligned}$$

Hence:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{L} &= 0, \quad \text{is constant in time,} \\ \frac{1}{2}\text{Tr}\mathcal{L}^2 &= a^2 + bc, \quad \text{is also constant in time.}\end{aligned}$$

From a general principle. Lax equations have constants of motion by virtue of their special form.

In this example, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ can be arbitrarily chosen as functions of t as well as the dependent variables a, b, c : $a^2 + bc$ is independent of t .

However, we do not know if this information is useful to solve the differential equation.

Example 2.2. The Toda lattice. Let \mathcal{L} be a symmetric tridiagonal matrix,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix}, \quad (38)$$

with $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ and $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$. Such a matrix is called a **Jacobi matrix**. Also let,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ & & & & & & a_{N-1} & 0 & \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Consider now the Lax's equation $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$.

- (i) Check that $[B, \mathcal{L}]$ is tridiagonal and symmetric. Since $\dot{\mathcal{L}}$ is tridiagonal and symmetric, $[B, \mathcal{L}]$ should be so.
- (ii) By a straightforward computation, we can check that the product of two tridiagonal matrices is tridiagonal. So $[B, \mathcal{L}]$ is tridiagonal.

(iii) Now, $[B, \mathcal{L}]^T = (B\mathcal{L})^T - (\mathcal{L}B)^T = \mathcal{L}^T B^T - B^T \mathcal{L}^T = \mathcal{L}(-B) - (-B)\mathcal{L} = -\mathcal{L}B + B\mathcal{L} = [B, \mathcal{L}] \Rightarrow [B, \mathcal{L}]$ is symmetric.

(iv) The off-diagonal of $\dot{\mathcal{L}}$ is not necessarily positive.

Hence, we get the system of equations:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), \\
\dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), \\
&\dots \\
\dot{a}_{N-1} &= a_{N-1}(b_{N-1} - b_N), \\
\dot{b}_1 &= -2a_1^2, \\
\dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), \\
&\dots \\
\dot{b}_i &= 2(a_{i-1}^2 - a_i^2), \\
&\dots \\
\dot{b}_N &= 2a_{N-1}^2,
\end{aligned} \tag{40}$$

From (40), we cannot directly determine that $\text{Tr } \mathcal{L}^k$ are constant in time. This follows from Lax's equation, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$.

Physical interpretation of the Toda lattice. We take the mass-spring system as a model for a one-dimensional chain of atoms interacting via nonlinear forces.

We have the following considerations.

- Masses are different, in general. Mas of i^{th} particle = m_i .
- Amount of work (energy) to compress the spring a distance r : If $r < 0$, the spring is compressed.
- Spring are weightless.
- Total energy.

$$E = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{q}_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}). \tag{41}$$

- q_i is the displacement of the i^{th} particle from rest position.
- $q_{i+1} - q_i$ is the total extension or compression of the i^{th} spring
- $V_i(r)$ is the work done = potential energy stored in the spring.

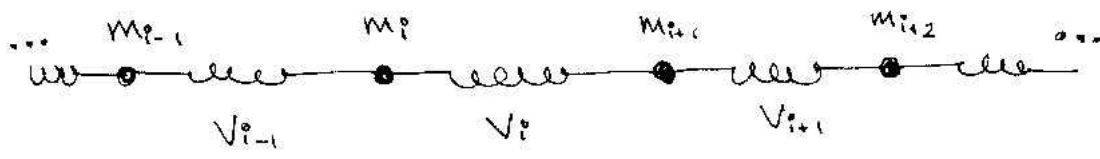


Figure 4.

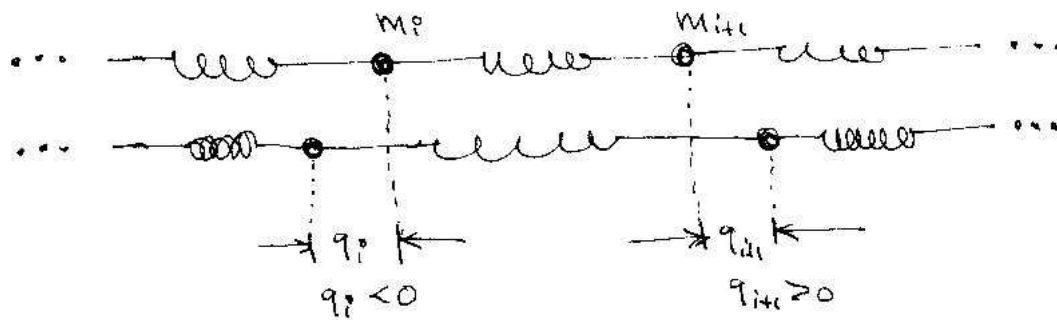


Figure 5.

Total extension = $q_{i+1} - q_i$

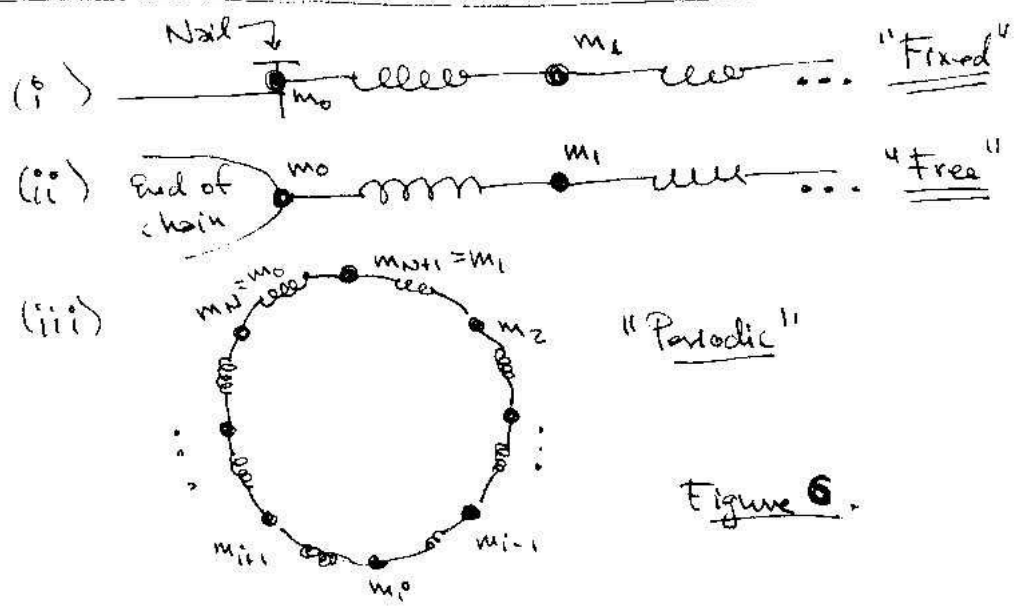


Figure 6.

Figure 2: The Toda lattice

- Define:

$$p_i = m_i \dot{q}_i = \text{momentum of } i^{\text{th}} \text{ particle.}$$

- Total energy. **Hamiltonian.**

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (p_i)^2 + V_i(q^{(i+1)} - q^{(i)}). \quad (42)$$

The sum extends to all particles.

Boundary conditions. Information about first and last particles is required.

1. (i) They are tied down,
2. (ii) they are free, or
3. (iii) they are periodic.

The potential $V_i(r)$ models different kinds of interatomic forces, and general mass-spring systems are not integrable Hamiltonian systems. Say, for the Hamiltonian (42),

$$\begin{aligned} \dot{q}^{(i)} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}^{(i)} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (43)$$

Morikazu Toda [To1, To2] invented a nonlinear system:

- (i) $m_i = m, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$, *i.e.*, all the masses are the same,
- (ii) and all the springs are the same, *i.e.*, $V_i(r) = V(r), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \dots$
- (iii) The force law becomes

$$V(r) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r. \quad (44)$$

In limiting cases, the potential $V(r)$ approaches some standard physical models.

- if $k \equiv \alpha\beta$, let $\beta \rightarrow 0$ and keeping α fix,

$$\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta r} - 1) + \alpha r = \frac{\alpha}{\beta} \left(-r\beta + \frac{1}{2}\beta^2 r^2 + O(\beta^3) \right) + \alpha r = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2)$$

i.e., for $|\beta| \ll 1$, we have the harmonic oscillator,

$$V(r) = \frac{1}{2}\alpha\beta r^2 + O(\beta^2).$$

- If $\beta \rightarrow \infty$, $V(r) \rightarrow$ potential governing the interaction of hard elastic rods.

Then, setting $\alpha = \beta = 1$, $m = 1$ and $r = r_i = q^{(i+1)} - q^{(i)}$, the Hamiltonian is

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})} + (q^{(i+1)} - q^{(i)}) - 1. \quad (45)$$

If the boundary condition is periodic, $q^{(N+1)} = q^{(1)}$, $q^{(N+1)} = q^{(1)}$ (or $q^{(N)} = q^{(0)}$), then the sum $(q^{(i+1)} - q^{(i)})$ telescopes to zero and one is left with (plus a constant which is neglected)

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i)^2 + e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})}. \quad (46)$$

This is the definition of the Toda Hamiltonian and the properties under periodic or non-periodic are studied.

If we move the 0th particle to $x = -\infty$ and the $(N + 1)$ th particle to $x = +\infty$, then

$$\begin{aligned} e^{q^{(0)}} &= 0, \\ e^{-q^{(N+1)}} &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

This is called the **free Toda lattice**.

The general Toda chain (45) has more physical meaning than the free Toda chain, but latter has more interesting mathematica properties.

Except for periodic boundary conditions, (46) has as potential $V(r) = e^{-r}$, rather than (44): for r small, $V(r) = e^{-r} - r - \frac{1}{2}r^2 - \dots$ is **not** the potential for the harmonic oscillator, as opposed to (44).

Let us return to (40). Define, for $i = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2} e^{-(q^{(i+1)} - q^{(i)})/2} \\ b_i &= \frac{1}{2} p_i. \end{aligned} \quad (48)$$

This is what is known as **Flaschka's Transformation**.

Under Flaschka's transformation (48), we can check that the free Toda chain, equations (46), (47), are equivalent to Lax equations (40). (Calculate).

There is **no** really an interpretation of the Lax representation of the Toda lattice equation in Flaschka's coordinates (48). We can then ask us several questions.

- Q1.** If we start with Toda's Hamiltonian, (42), (43), (44) (or equations (46), (47)), how one would go to Lax's representation lattice (40)?

Q2. The physical equations are Hamiltonian. How are the Lax equations Hamiltonian? They are on a *co-adjoint orbit* ... (whatever that means ...)

Physical equations:

Equations: ✓ Written.

Hamiltonian: ✓ Written.

Lax equations:

Equations: ✓ Written.

Hamiltonian: Not written yet.

Q3. The eigenvalues of \mathcal{L} are constants of motion. What do they represent physically?

Q4. How do you solve the equations?

Example 2.3. *Periodic Toda Chain.* Let the Lax pair,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} & \\ a_N & & & & & a_{N-1} & b_N & & \end{pmatrix}, \quad (49)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} & \\ -a_N & & & & & a_{N-1} & 0 & & \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Note that the corners are not zero.

$p_{\mathcal{L}}(\lambda)$ is time independent, since $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ (its roots) are t -independent.

In the actual example, \mathcal{L} and B can be replaced by

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \rho a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ \frac{a}{\rho N} & & & & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \rho a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & & \\ & a_2 & 0 & -a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & 0 & -a_{N-1} \\ -\frac{a}{\rho N} & & & & & & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix},$$

with $\rho \neq 0$ is an arbitrary parameter. If we compute $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ we get (51)!

Again, the roots of $\det(\mathcal{L} - \lambda I) = 0$ are t -independent \Rightarrow the polynomial $\det(\mathcal{L} - \lambda I)$ is also t -independent.

On the other hand, we have the rational function,

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = \det(\mathcal{L} - \lambda I)$$

is a polynomial in two parameters. Now,

$$\mathcal{R}(\rho, \lambda) = 0$$

represents an algebraic curve and Riemann surfaces theory start to appear here.

Example 2.4. *Further remarks on the Toda chain. Mathematical questions.* Let be \mathcal{L} a matrix of the form (38) or (49), where we have either $N - 1$ a_n 's and N b_n 's, or N a_n 's and N b_n 's. Should we expect an iso-spectral deformation to exists? *I.e.*, can we change the entries of \mathcal{L} and do still get the eigenvalues of \mathcal{L} to be constant in time?

The \mathcal{L} 's have either $2N - 1$ or $2N$ entries. The N constant eigenvalues impose N conditions, so that there are $N - 1$ or N relations (degrees of freedom) remaining to vary the entries of *ele*.

So far, we have **only one** isospectral deformation namely $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$. So, we expect to find $N-2$ or $N-1$ more isospectral deformations, all of them, independent (Independent in some sense to be defined).

Q1. How could one picture this geometrically? The set of \mathcal{L} 's of the form

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

can be put in a space of $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^{N-1}$. The a_n 's live in \mathbb{R}^N and the b_n 's live in $(\mathbb{R}^+)^{N-1}$. (\mathbb{R}^+ are the real positive numbers). And the matrix

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & & \\ & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_n & & & & & a_{N-1} & b_N & \end{pmatrix},$$

is in $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^N$ ($a_n \in \mathbb{R}^N$, $b_n \in (\mathbb{R}^+)^N$). The subsets of \mathcal{L} 's with given eigenvalues $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ are called **isospectral manifolds**. These isospectral manifolds are N -dimensional subsets (which, in fact, are submanifolds).

Isospectral deformations, like the curves $t \text{map} \mathcal{L}(t)$ that solve the Toda lattice, will lie entirely on these manifolds. The vector fields, defining the Lax's equation, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, are tangent to the isospectral manifold. See figure.

Mathematics problem. Clarify the structure of the isospectral manifolds.

Q2. To solve the differential equations $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, we ask another question. Given the initial displacements and velocities of all masses of the free Toda lattice at $t = 0$: $\overset{\circ}{q}^1, \dots, \overset{\circ}{q}^N, \overset{\circ}{p}_1, \dots, \overset{\circ}{p}_N$ —given, we want to solve the Hamilton's equations of motion, equations (42), (43).

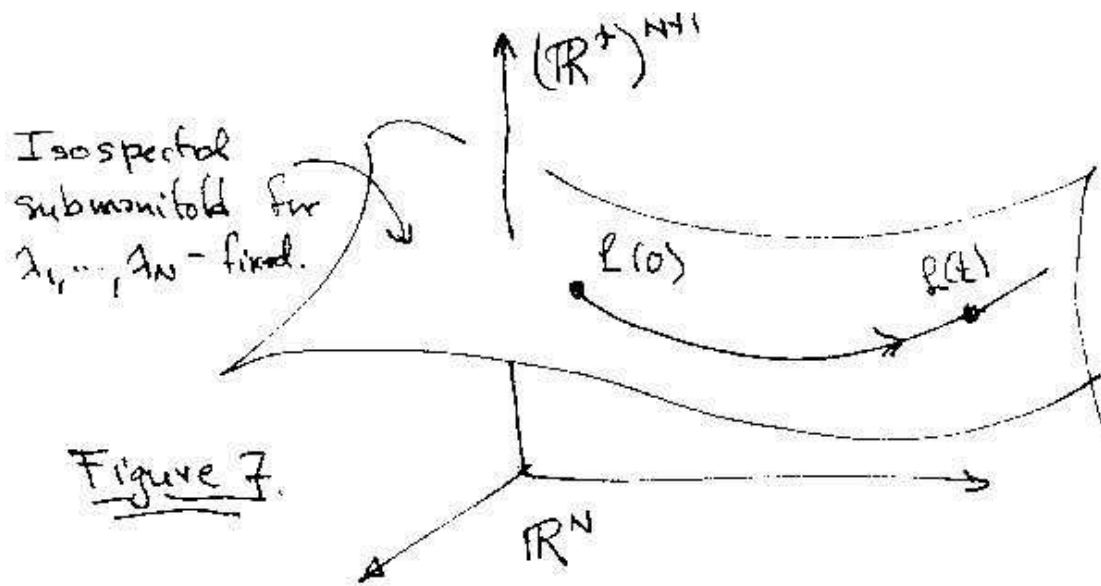


Figure 3: Isospectral deformation

First, transfer to $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, and calculate $\overset{\circ}{a}_1, \dots, \overset{\circ}{a}_{N-1}, \overset{\circ}{b}_1, \dots, \overset{\circ}{b}_N$, by Flaschka's Transformation, equation (48). Now, construct, a *Jacobi matrix*, $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$. The eigenvalues of $\overset{\circ}{\mathcal{L}}$ are constant in time.

In order to solve $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, with initial conditions $\mathcal{L}(0) = \overset{\circ}{\mathcal{L}}$ given, we "only" need to follow N other parameters, the coordinates that distinguish different matrices on an isospectral submanifold.

- Q3.** What quantities, besides the eigenvalues, will determine all the entries of the Jacobi matrix? How this quantities change with \mathcal{L} ?
- Q4. Relation with Hamiltonian mechanics** Given constants of motion, how do you effectively reduce the number of unknowns?
- Q5.** All these implies inverse spectral theory. To what extent does the spectrum of a linear operator \mathcal{L} determine the operator?

To make an analogy, we refer to the Laplace operator. Consider the eigenvalue problem of the Laplace operator on a domain $\Omega \in \mathbb{R}^2$, with Dirichlet boundary

conditions:

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\lambda u, & x \in \Omega, \\ u &= 0, & x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

$\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, the eigenvalues of the Laplace operator, physical represent natural frequencies of a drum of shape Ω :

$$\text{Shape of a drum } \Omega \quad \Rightarrow \quad \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} - \text{frequencies.}$$

Now, we have the opposite question.

Now [Kac], if one can hear the sounds (all the sounds) of the drum (*i.e.*, all its frequencies), can we recover all the eigenvalues $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ (there are infinitely many), to what extent does one know the shape of the drum Ω ?

This is a famous problem in spectral theory, unsolved when Flaschka wrote his notes. The problem was solved in 1992, by Gordon, Webb, and Wolpert [Gor1, Gor2].

In [Fla], Flaschka studies several simpler analogous problems in one-dimension and solve them.

Lax's equations: Partial differential equations

Example 2.5. *The Korteweg-de Vries equation.* Here, \mathcal{L} is not a matrix, it is an operator. This is the original example of the Lax's equation.

An authentic question in this vein of ideas is the following. What does the set of all matrices with fixed spectrum look like? We will try to solve this question but in the context of differential operators.

Let \mathcal{L} be the differential operator $D^2 + q$, where $D = \frac{d}{dx}$ and $q = q(x)$. This could be defined in $\mathcal{L}^2([a, b])$, with $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ with appropriate boundary conditions.

Example 2.6. *The Laplacean operator in one dimension.* Consider the eigenvalue problem with $q = 0$ and periodic boundary conditions:

$$\begin{aligned}y''(x) &= \lambda y(x), & -\infty \leq a < b \leq +\infty, \\ y(a) &= y(b), \\ y'(a) &= y'(b).\end{aligned}$$

The eigenvalues are $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -\left(\frac{2\pi}{b-2}\right)^2, \dots, \lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = -\left(\frac{2j\pi}{b-2}\right)^2, \dots$, with eigenfunctions $y_0(x) = 1, y_1(x) = \sin(\sqrt{\lambda_1}x), y_2(x) = \cos(\sqrt{\lambda_1}x), \dots$, etc. If $q(x) \neq 0$, the eigenvalues separate: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \dots$, etc. More details later. \square

There are more possibilities of boundary conditions. We can also think about $D^2 + q$, as a big matrix with eigenvalues as regular matrices do have. Similarly, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ should imply that these eigenvalues are t -independent.

Try to find an operator B , associated to \mathcal{L} , such that,

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

Start with $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t)D^2 + q(x; t)$. For each t , we have an operator in x . The coefficient is different for each t . Then, the operator is $\mathcal{L}(t)$ is *deformed* in t . We also assumed that $q(x, t)$ is smooth in t .

\mathcal{L} applied to $f(x)$ is

$$f''(x) + q(x, t)f(x),$$

so that if we take $\frac{\partial}{\partial t}$ to $\mathcal{L}f(x)$, we get

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}f(x) = \frac{\partial}{\partial t}q(x, t)f(x).$$

So, we define:

$$\dot{\mathcal{L}} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} = q_t,$$

which is a multiplication operator: $\dot{\mathcal{L}}f = q_t f$. So, we should require $[B, \mathcal{L}]$ to be a multiplication operator as well, so that all differentiations cancel out.

Case 1. $\mathbf{B} = \mathbf{D}$. Here, $\dot{\mathcal{L}} = q_t = [B, \mathcal{L}] = [D, D^2 + q]$. Let us compute separately the RHS of this equation.

$$\begin{aligned} [D, D^2 + q]\psi &= D(D^2 + q)\psi - (D^2 + q)D\psi, \\ &= D(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)\psi', \\ &= \psi''' + q'\psi + q\psi' - (\psi''' + q\psi'), \\ &= q'\psi. \end{aligned}$$

Hence, $[D, D^2 + q] = q_x$, so that $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ becomes

$$q_t = q_x, \tag{54}$$

which has a general solution

$$q(x, t) = q_0(x + t), \tag{55}$$

where q_0 is a $C^1(\mathbb{R})$ differentiable function.

Claim 2.2. *The eigenvalues of $D^2 + q_0(x)$ are invariant under translations.*

Proof. If $y(x)$ is a solution of

$$y''(x) + q_0(x)y(x) = \lambda y(x),$$

for some λ , then $z(x) \equiv y(x+t)$ solves

$$z''(x) + q_0(x+t)z(x) = \lambda z(x). \quad \square$$

Case 3. (We will return to case 2 soon). Let us look for a third order operator B of the form,

$$B = a(x)D^3 + u(x)D + v(x),$$

such that $[B, \mathcal{L}]$ is a multiplication operator. We have to compute $[B, \mathcal{L}] = [aD^3 + uD + v, D^2 + q]$:

$$\begin{aligned} [aD^3 + uD + v, D^2 + q]\psi &= (aD^3 + uD + v)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(a\psi''' + u\psi' + v\psi), \\ &= a(\psi^{(5)} + q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'' + q\psi''') \\ &\quad + u(\psi'''' + q'\psi + q\psi')v\psi'' + vq\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)} + a\psi^{(5)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'' + u\psi''') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi' + v\psi'') - (qa\psi'''' + qu\psi' + qv\psi), \\ &= a(q'''\psi + 3q''\psi' + 3q'\psi'') \\ &\quad + uq'\psi \\ &\quad - (a''\psi'''' + 2a'\psi^{(4)}) \\ &\quad - (u''\psi' + 2u'\psi'') \\ &\quad - (v''\psi + 2v'\psi'), \\ &= -2a'\psi^{(4)} - a''\psi'''' + (3aq' - 2u')\psi'' \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')\psi' + (aq''' + uq' - v'')\psi \\ &= [-2a'D^4 - a''D^3 + (3aq' - 2u')D^2 \\ &\quad + (3aq'' - u'' - 2v')D + (aq''' + uq' - v'')] \psi. \end{aligned}$$

To have a differentiation operator, we require to have the coefficients of the differen-

tiation operator to be zero:

$$\begin{aligned}
D^4 : \quad & a_x = 0 \Rightarrow a = \text{constant.} \\
D^3 : \quad & a_x x = 0 \quad \text{holds automatically.} \\
D^2 : \quad & 3aq' - 2u' = 0 \Rightarrow (3aq' - 2u')_x = 0, \quad \text{since } a = \text{constant,} \\
& 3aq - 2u = \tilde{c} \Rightarrow u = \frac{3}{2}aq + c, \\
D : \quad & 3aq'' - u'' - 2v' = 0 \Rightarrow 3aq'' - \frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0 \\
& \frac{3}{2}aq'' - 2v' = 0 \Rightarrow v' = \frac{3}{4}aq'' \\
& \Rightarrow v = \frac{3}{4}aq' + d \quad (d = \text{constant}).
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
q_t &= \dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}] = aq_{xxx} + uq_x - v_{xx} \\
&= aq_{xxx} + \left(\frac{3}{2}aq + c\right)q_x - \frac{3}{4}aq_{xxx} \\
&= \frac{1}{4}aq_{xxx} + \frac{3}{2}aqq_x + cq_x,
\end{aligned} \tag{56}$$

i.e.,

$$q_t = \frac{a}{4}(q_{xxx} + 6qq_x + 4cq_x),$$

which is the nonlinear PDE for $q = q(x, t)$. Choose $a = 4$, $c = 0$ This way we get the famous Korteweg-deVries equation:

$$q_t + q_{xxx} + 6qq_x = 0, \tag{57}$$

Case 2. Why did we skip this case of second order operators? This is why.

Consider the second order linear operator $B = \alpha(x)D^2 + \beta(x)D + \gamma(x)$. Compute $[B, \mathcal{L}]\psi$:

$$\begin{aligned}
[B, \mathcal{L}]\psi &= [\alpha D^2 + \beta D + \gamma, D^2 + q]\psi = (\alpha D^2 + \beta D + \gamma)(\psi'' + q\psi) - (D^2 + q)(\alpha\psi'' + \beta\psi' + \gamma\psi) \\
&= \dots (\text{some quite not lengthy computations } \dots) \\
&= [(-2\alpha')D^3 + (-\alpha'' - 2\beta')\psi D^2 + (2\alpha q_x - \beta'' - 2\gamma')D + (\alpha q_{xx} + \beta q_x - \gamma'')]\psi.
\end{aligned}$$

As in the previous case, we require a multiplication operator, so we must set to zero the coefficients of the D operator and its powers:

$$\begin{aligned}
D^3 : \quad & -2\alpha' = 0 \Rightarrow \alpha = \text{constant} = \alpha_0. \\
D^2 : \quad & -\alpha'' - 2\beta' = 0 \Rightarrow \beta = \text{constant} = \beta_0. \\
D : \quad & 2\alpha q_x - \beta' - 2\gamma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \alpha_0 q_x \Rightarrow \gamma = \alpha_0 q + c_1.
\end{aligned}$$

Hence,

$$[B, \mathcal{L}]\psi = \alpha_0 q_{xx} + \beta_0 q_x - (\alpha_0 q)'' = \beta_0 q_x,$$

and

$$B = \alpha_0 D^2 + \beta_0 D + (\alpha_0 q + c_1) \Rightarrow B = \alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1.$$

We can verify that $[B, \mathcal{L}] = [\alpha_0 \mathcal{L} + \beta_0 D + c_1, \mathcal{L}] = \alpha_0 [\mathcal{L}, \mathcal{L}] + \beta_0 [D, \mathcal{L}] + c_1 [I, \mathcal{L}] = 0 + [D, D^2 + q] + 0 = \dots = \beta_0 q_x$, which is a variation of Case 1.

Case $2j + 1$. There are differential operators of all **odd** orders such that $[B, \mathcal{L}]$ is a multiplication operator. Hence, Lax equation $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$ becomes a PDE:

$$q_t = \text{nonlinear mess with } q, q_x, \dots, \frac{\partial^{2j+1}}{\partial x^{2j+1}} q.$$

Exercise. Compute the 5th order B and corresponding Lax equation $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$. You should get:

$$q_t + 3q^2 q_x + 20q_x q_{xx} + 10q_x q_{xxx} + \partial_x^5 q.$$

General method to find "higher" Lax's equations: later.

Case $2j$. If we want B to be **even**, order and $[B, \mathcal{L}]$ be multiplicative, we then require

$$B = \text{const.} \mathcal{L}^j + \text{stuff of order } 2j - 1,$$

which implies $[\mathcal{L}^j, \mathcal{L}] = 0$, *i.e.*, there is zero contribution at this order, and we return to the previous case and B has to be of odd order (not an obvious fact by now).

We have then found a family of PDEs related to the KdV equation,

$$q_t = (\text{nonlinear differential operator}) \cdot q,$$

called the **Korteweg-deVries hierarchy**. They are **commuting Hamiltonian flows** in an ∞ -dimensional phase space.

Lax's equations, $\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}]$, are iso-spectral "*deformations*" of the differential operator \mathcal{L} . We have considered this differential operator, but there are other types of operators which are also iso-spectral, such as integro-differential operators. This requires a deep understanding of spectral theory. \square

Example 2.7. The Korteweg-deVries equation. Physical Interpretation. The Korteweg-deVries equation

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

is very important in hydrodynamics, plasma physics, etc.

We start with the simplest wave equation,

$$q_t + a q_x = 0, \quad a = \text{constant}. \quad (58)$$

If the initial condition is given,

$$q(x, 0) = f(x),$$

then the solution is

$$q(x, t) = f(x - at).$$

If, say, $a > 0$, we have a translation at to the right. See figure.

Figure.

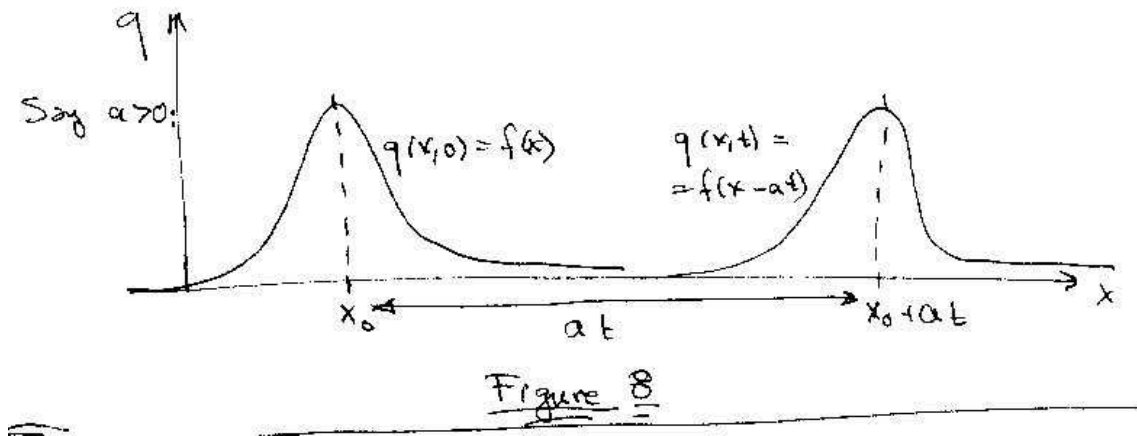


Figure 4: Translational wave

Dissipation. Energy is taken away from the system,

$$q_t + a q_x = b q_{xx}, \quad b > 0, \quad q(x, 0) = f(x). \quad (59)$$

The solution to this initial value problem is

$$q(x, t) = \frac{1}{\sqrt{b\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(x - at - y)^2}{4bt}\right) dy. \quad (60)$$

If we substitute $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ into (59), we get

$$\omega(k) = ak - ibk^2. \quad (61)$$

Hence, $q^{(k)} = e^{ik(x-at)-bk^2t}$ solves (59). Taking, say, the imaginary part (the same applies for the real part),

$$e^{-bk^2t} \sin(k(x-at)), \quad (62)$$

describes a:

- (a) sinusoidal wave,
- (b) translational wave with velocity a , and
- (c) decreasing amplitude wave by e^{-bk^2t} .

Fourier Analysis The solution can be written in terms of all $q^{(k)}$:

$$q(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ik(x-at)-bk^2t} dk, \quad (63)$$

with initial condition

$$q(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{ikx} dk,$$

$|A(k)|$ denotes the amplitude of the e^{ikx} component. Then, all components are translated by $x-at$:

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x-at)}.$$

Then, the amplitude decreases as

$$|A(k)| \longrightarrow e^{-bk^2t}|A(k)|. \quad (64)$$

The damping factor e^{-bk^2t} kill large k components more quickly.

Terminology.

$$\begin{aligned} k &= \text{wave number,} \\ \omega &= \text{frequency,} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} \text{wave length,} \\ R\delta\omega, k &= 0 \text{ is the dispersion relation} \end{aligned}$$

Dispersion effects. Consider the dispersive wave equation

$$q_t = -aq_x + cq_{xxx}. \quad (65)$$

Substitute $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ to obtain

$$\omega(k) = ak + ck^3.$$

The solution to the dispersive equation is

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik(x - at - ck^2t)} dk. \quad (66)$$

Note that amplitude is **not** damped. The harmonic modes translate with **k -dependent velocities**:

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{ik(x - at - ck^2t)},$$

i.e., the speed of propagation of a mode depends on the wave number. See Figure.

Figure

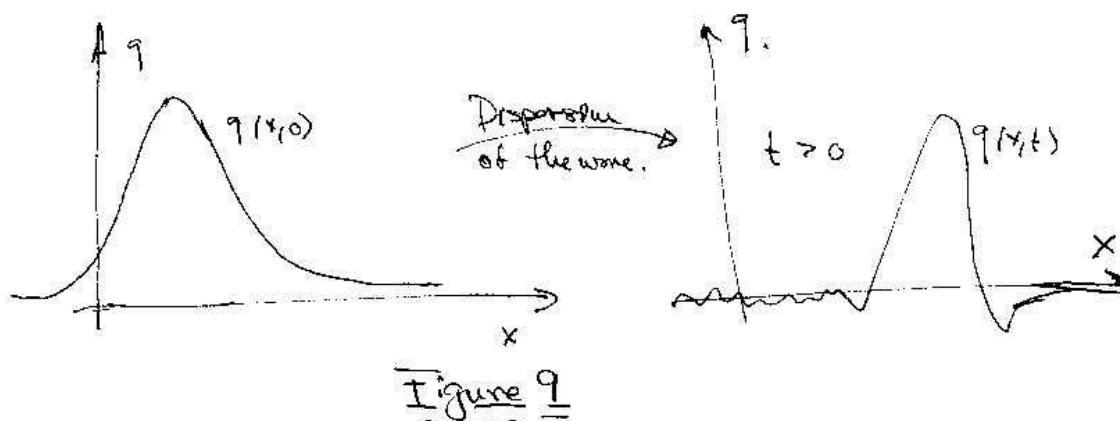


Figure 5: Dispersive wave

This phenomenon is called **dispersion**: light passing through a prism, ripples in the water wave after a rock is thrown in a pond, etc.

The wave equation,

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (67)$$

does **not** show dissipation or dispersion!

Nonlinear effects. Modify $q_t = -aq_x$ to:

$$q_t = -qq_x, \quad (68)$$

which is a nonlinear equation. The complex exponential, $q(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, does **not** solve this equation, precisely by the nonlinearity. :(

In this instance, we look for solutions of the form

$$q(x, t) = f(x - qt), \tag{69}$$

for some continuously differentiable function f , $f \in C^1(\mathbb{R})$, except at some isolated points. Notice that $q = q(x, t)$ appears in the argument of f .

This type of solution, for the initial condition $q(x, 0) = f(x)$ evolves as the following figures show.

Figures

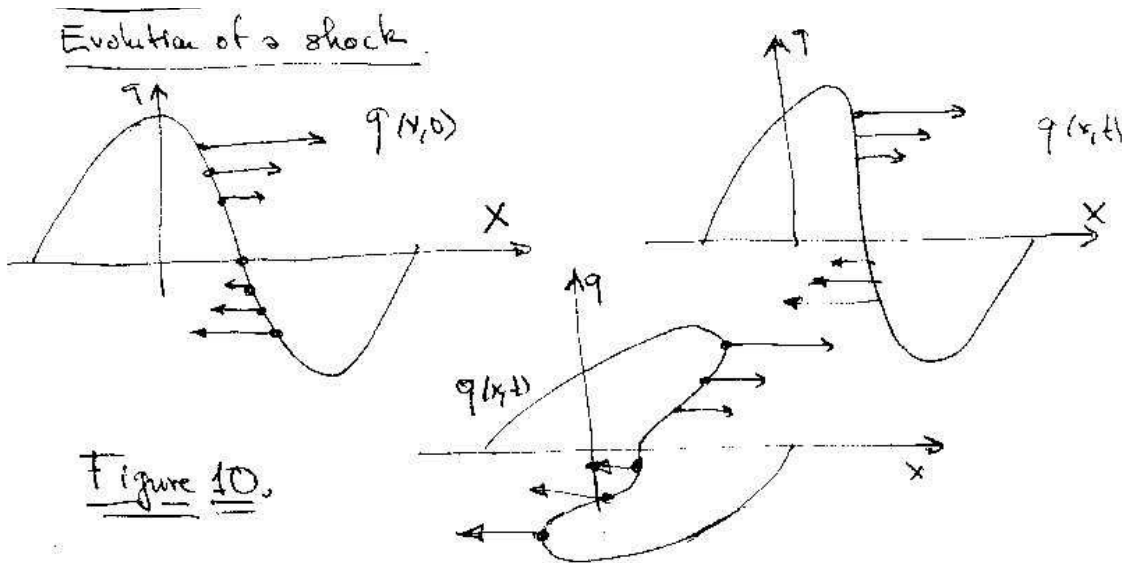


Figure 6: Shock wave

We say that the wave "breaks" or has "developed a discontinuity" (in $q_x(x, t)$!) or "shock". E.g., shallow waves in beaches. A simplification of the previous figures is as follows, and this can also be done analytically.

Figure

The Korteweg-deVries equation. The Korteweg-deVries equation, as mentioned previously, it is an equation that describes propagation of waves in shallow water. [Sco, KdV]. The equation describes the equilibrium of dispersion and non-linearity. As a consequence, there is no losses of energy and shape. See Figure.

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0.$$

Figures

Averaging of a shock wave

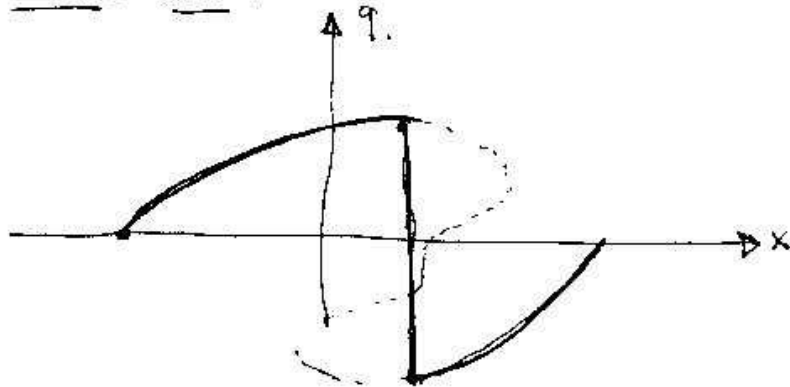


Figure 11

Figure 7: Averaging shock

KdV soliton solution.

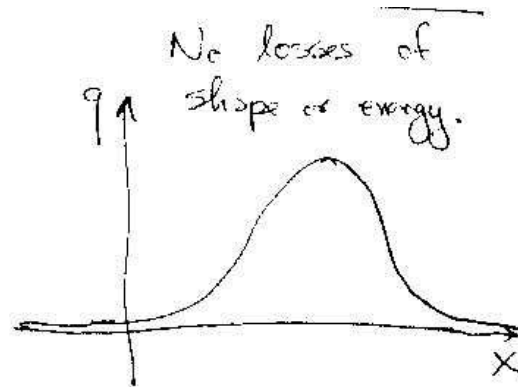
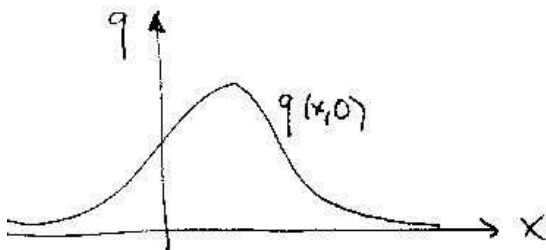


Figure 12

Figure 8: The KdV soliton

The KdV arises as an approximation from higher order dispersion and nonlinearities. If q is small, $|q^2q_x| \ll |qq_x|$. Since q is not so small (*i.e.*, it is **not** "infinitesimal"), then $|qq_x|$ contributes to the equation.

Similarly, $|q_{xxxx}| \ll |q_{xxx}|$, which means that $e^{i(kx+k^5t)}$ is less significant than $e^{i(kx-k^3t)}$. This works if k is small. Then, k^5 is smaller than k^3 . However, for large values of t , then k^5t is large and might have a significant contribution.

Nonlinearity \sim Wave amplitude.

q infinitesimal \longrightarrow there are no linear terms (mathematically, a nonlinear equation is replaced by its linearization about zero).

q small \longrightarrow quadratically nonlinear terms.

This is just a Taylor expansion in parameters measuring the size of q .

Dispersion \sim Wavelength.

q has "infinite" wave length or $k \sim 0 \longrightarrow$ there is no dispersion.

q has long waves only, or k is small but not 0 $\longrightarrow q_{xxx}$, third order dispersion

This is just a Taylor expansion in the wave number k .

One more approximation in the derivation of the KdV equation: 2-dimensional or 3-dimensional effects are weak. But still we can have propagation to left or right.

The first order derivative, ∂_t , restricts the motion to left or right, as in $q_t + aq_x = 0$.

Summary.

We have an equation for operators:

$$\dot{\mathcal{L}} = [B, \mathcal{L}].$$

It defines an **isospectral deformation** of the operator \mathcal{L} . Currently, it represents an ODE or a PDE for the coefficients of the operator \mathcal{L} . Automatically, it possesses a set of conservation laws, the eigenvalues of \mathcal{L} .

It remains to:

- Check that this equation is Hamiltonian.
- Check how we can extract information from it.

Two examples. The Toda chain and the KdV equation can be put in Lax form. They are typical examples (and the simplest) of solvable models and equations.

They also represent some physical quantities and nature phenomena.

3 El Método de Dispersión Inversa.

La ecuación que ahora deseamos resolver es la ecuación de KdV,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (70)$$

la ecuación de Korteweg-deVries. Notemos que hemos puesto $q(x, t) = -u(x, t)$. Como condición inicial para este problema tomemos:

$$u(x, 0) = V(x), \quad (71)$$

donde la función $V(x)$ es una función dada.

Nuestro problema es un problema de propagación de ondas en un canal con agua de longitud infinita, por lo que debemos dar el comportamiento de la solución $u(x, t)$ en el infinito.

Como en cualquier tiempo finito la onda está a una distancia finita, en el infinito el agua debe de estar quieta, en reposo. Por tanto, vamos a pedir para la amplitud de onda

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty, \quad (72)$$

para todo tiempo finito t . Así pues, deseamos resolver la ecuación (70), con condición inicial (71) y comportamiento en el infinito (72).

3.1 Invarianza de Galileo.

Probaremos enseguida que la ecuación de Korteweg-deVries es invariante bajo transformaciones de Galileo. Este resultado es esperado, pues para la construcción de las ecuaciones se usaron desde un principio la ley de Newton y las leyes de la hidrodinámica. Tomando:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau) - \lambda, \quad (73)$$

con:

$$\begin{aligned} \xi &= x - 6\lambda t \\ \tau &= t, \end{aligned}$$

entonces, sustituyendo en (70):

$$(U_\tau - 6\lambda U_\xi) - 6(U - \lambda)U_\xi + U_{\xi\xi\xi} = 0,$$

i.e.,

$$U_\tau - 6UU_\xi + U_\xi\xi\xi = 0,$$

la cual es la ecuación de Korteweg-deVries (KdV). Por lo tanto, la ecuación de KdV es invariante bajo transformaciones de Galileo.

3.2 La transformación de Miura y la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica.

Para su referencia, puede consultar detalles en [To2].

La ecuación de KdV (70) es una ecuación **no** lineal, debido al término uu_x . En general, las ecuaciones no lineales, aún las ordinarias, son muy difíciles de estudiar y aún más, de resolver. Sin embargo, hay algunas ecuaciones que, usando alguna transformación más o menos ingeniosa, pueden ser linealizadas. Por ejemplo, ecuaciones del tipo

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \quad (74)$$

llamadas ecuación de Riccati, pueden ser linealizadas bajo la transformación:

$$y = \frac{z'}{zP(x)} \quad (75)$$

que conducen a la ecuación:

$$P(x)z'' + (PQ - P')z' + P^2Rz = 0 \quad (76)$$

la cual es lineal en z [Lam], [NSS]. La complejidad en el método de solución de esta ecuación depende de las funciones $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, pero el hecho que es *lineal* puede facilitar enormemente la tarea de resolverla.

También existen ecuaciones en derivadas parciales *no* lineales, las cuales pueden ser linealizadas. Por ejemplo, la ecuación de Burgers:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (\nu > 0),$$

puede ser linealizada por la transformación

$$u = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}, \quad (77)$$

que se le llama **Transformación de Cole-Hopf**, y que conduce a la expresión

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi} \right)_x = \nu \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi} \right),$$

que al integrar respecto a x se obtiene:

$$\phi_t = \nu\phi_{xx} + C(t)\phi,$$

donde $C(t)$ es constante de integración. Ahora, llamando

$$\phi = \Phi \exp \left[\int C(t) dt \right],$$

obtenemos la ecuación del calor

$$\Phi_t = \nu\Phi_{xx},$$

por lo que la ecuación de Burgers puede ser integrada para cualquier $C(t)$.

Pensamos en utilizar transformaciones del tipo de Cole-Hopf (3.8), $u = \psi_x/\psi$, para tratar de linealizar la ecuación de KdV (3.1), pero solo nos lleva a una ecuación más complicada ... y no lineal ...

$$(\psi\psi_{xt} - \psi_x\psi_t)\psi^2 - 6(\psi\psi_{xx} - \psi_x^2)\psi\psi_x + \dots = 0 \quad (78)$$

La solución al problema de resolver la ecuación de KdV (70), con condición inicial (71), se encontró por un camino realmente inesperado. Para verlo, definamos primero los operadores K y M de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K[u] &= u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ M[v] &= v_t + 6v^2v_x + v_{xxx} \end{aligned} \quad (79)$$

Con esta notación, la ecuación de KdV se escribe:

$$K[u] = 0$$

Ahora, a la ecuación:

$$M[v] = 0,$$

se le conoce como **ecuación modificada de KdV** (mKdV).

Muchos matemáticos siguieron buscando una transformación que linealizara la ecuación de KdV, mientras R. Miura estudiaba simultáneamente las ecuaciones de KdV y mKdV [Miu]. En sus estudios, Miura observó que si u y v (soluciones a las ecuaciones de KdV y mKdV respectivamente) están relacionadas por la ecuación

$$u = v^2 + v_x, \quad (80)$$

entonces,

$$\frac{\partial}{\partial x} M[v] + 2vM[v] = K[u],$$

donde los operadores K y M están dados por (79).

Así, si v satisface la ecuación mKdV, $M[v] = 0$, entonces u satisface la ecuación de KdV,

$$K[u] = 0.$$

Al revés también es cierto. Esto es, si u satisface la ecuación de KdV, $K[u] = 0$, entonces v es solución de una ecuación mucho más complicada, $\frac{\partial}{\partial x}M[v] + 2vM[v] = 0$, que no necesariamente es la ecuación MKdV, pero que si se pide $v \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $M[v] = 0$.

A la transformación (80), se le conoce como **transformación de Miura**.

El siguiente intento fue linealizar la transformación de Miura (80). Si en dicha transformación $u(x)$ fuese dada, entonces es una ecuación del tipo de Riccati (74) para la función $v(x)$, con $P(x) \equiv 1$, $Q(x) \equiv 0$ y $R(x) = -u(x)$. Podemos así linealizar (80) (cf. (74)) con la transformación (cf. (75)):

$$v = \frac{\psi_x}{\psi},$$

por lo que ψ satisface la siguiente ecuación:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0.$$

Ahora, recordemos que la ecuación de KdV es invariante bajo las transformaciones de Galileo (sección 3.1). Es decir, podemos tomar la transformación (73):

$$u \longrightarrow u - \lambda.$$

Entonces:

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \tag{81}$$

¡Pero ésta es la ecuación estacionaria de Schrödinger de la mecánica cuántica!

En este momento, el enfoque ha cambiado. Ahora, más que hablar de una transformación, hablamos más bien de un problema asociado de dispersión para la función ψ , cuya información puede ser usada para conocer propiedades de $u = u(x, t)$. Desde este punto de vista, el perfil de la onda $u = u(x, t)$ es el potencial de dispersión. El tiempo t aparece aquí como un parámetro, por lo que hay un problema de dispersión para cada valor del parámetro t .

Es importante hacer notar, que el tiempo t de la ecuación de KdV **no tiene nada que ver** con la variable temporal de la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger. De esta forma, la idea de Greene (uno de los inventores del *Método de Dispersión Inversa*) fue buscar el “potencial” $u = u(x, t)$ para todo tiempo t , a partir de información del espectro $\lambda = \lambda(t)$ y de las funciones de onda $\psi = \psi(x, t)$ en todo instante t . Su idea fue correcta . . .

3.3 Los Espectros Discretos y Contínuos.

Al resolver la ecuación de Schrödinger y buscar cuáles valores toma la energía (*i.e.*, buscar los valores propios), encontraremos que pertenecen a dos tipos de conjuntos: uno **discreto** y otro **contínuo** y les llamaremos **espectro discreto** y **espectro contínuo**, respectivamente, a dichos conjuntos.

Tomemos $\lambda \equiv k^2$ en la ecuación (81), por lo que :

$$\psi_{xx} - (u - k^2)\psi = 0 \quad (82)$$

En nuestro problema de propagación de ondas en el agua, $u(x, t) \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$. Así, las asintóticas de las soluciones de la ecuación (81) son:

$$\psi(x, k) \sim e^{ikx} \quad \text{ó} \quad e^{-ikx},$$

pues en el caso $u(x, t) \equiv 0$, (82) es

$$\psi_{xx} + k^2\psi = 0.$$

Elijamos el comportamiento:

$$\psi(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{para } x \sim \infty,$$

debido al hecho de que queremos estudiar un problema de dispersión. Esto es, pedimos que hacia el infinito se propague una onda de módulo 1, después de haber interactuado con el potencial $u(x, t)$.

Para estudiar el efecto de u sobre ψ , consideremos la ecuación no homogénea:

$$\psi_{xx} + k^2\psi = \eta(x) \quad (83)$$

donde $\eta(x) \equiv u\psi(x, k)$ es el término no homogéneo. A la ecuación (83), podemos encontrarle una solución particular usando el método de variación de parámetros, pues conocemos dos soluciones linealmente independientes del problema homogéneo: e^{ikx} y e^{-ikx} .

La solución estará dada por

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \psi_p(x, k), \quad (84)$$

donde $\psi_p(x, k)$ es una solución particular dada por

$$\psi_p(x, k) = A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx}, \quad (85)$$

con

$$A(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-iky}\eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy$$

$$B(x) = \int_x^\infty \frac{e^{iky}\eta(y)}{W(e^{iky}, e^{-iky})} dy,$$

tales que $A(x), B(x) \rightarrow 0$, cuando $|x| \rightarrow \infty$, de tal modo que $\psi_p(x, k) \rightarrow 0$, pues pedimos el comportamiento $\psi(x, k) \sim e^{ikx}$, si $x \sim \infty$. La función W es el Wronskiano de las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y su valor es

$$W(e^{iky}, e^{-iky}) = -2ik.$$

Así la solución particular (85) de la ecuación de Schrödinger (83) está dada por:

$$\psi_p(x, k) = \int_x^\infty \frac{-e^{-iky}u(y)\psi(y, k)e^{ikx} + e^{iky}u(y)\psi(y, k)e^{-ikx}}{-2ik} dy$$

que simplificando y sustituyendo en (84) obtenemos:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y)\psi(y, k) dy \quad (86)$$

Esta es un ecuación integral para la función $\psi(x, k)$, solución a la ecuación de Schrödinger. Veremos más adelante que la ecuación integral puede resolverse usando iteraciones, y que, además, es una función analítica de la variable k para $\text{Im}(k) \geq 0$.

Ahora, la ecuación de Schrödinger es un problema de Sturm-Liouville. Sabemos que las funciones propias corresponden a **valores propios discretos**. También sabemos que, cuando se trata de funciones propias, los valores propios son negativos: $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$, ($j = 1, 2, 3, \dots$), dado que el potencial $u(x) < 0$ y $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Para tener tal comportamiento, pedimos que $k_j = i\kappa_j$. La continuación analítica impondrá la condición $\text{Im}(k_j) = \kappa_j > 0$. Los estados correspondientes a las funciones propias forman lo que se llama **los estados ligados**.

En el caso $\text{Im}(k) = 0$, tenemos que $\lambda = k^2 \geq 0$. Aquí, las soluciones $\psi(x, k)$ oscilan y están acotadas, por lo que los valores de k no están restringidos y pueden tomar cualquier valor real, esto es, pueden variar continuamente en $\text{Im}(k) = 0$. Aquí hablamos del **espectro continuo**. Estos son **los estados libres**.

Para visualizar que los estados libres pertenecen al espectro continuo y los acotados al discreto, recurramos a las ideas de la mecánica cuántica. Sabemos que en mecánica cuántica la energía (aquí representada por la letra λ) es muy probablemente mayor que la “energía potencial” $u(x)$. (En mecánica clásica, siempre es mayor). Por tanto, $\lambda - u = k^2 - u > 0$. (Figura 9).

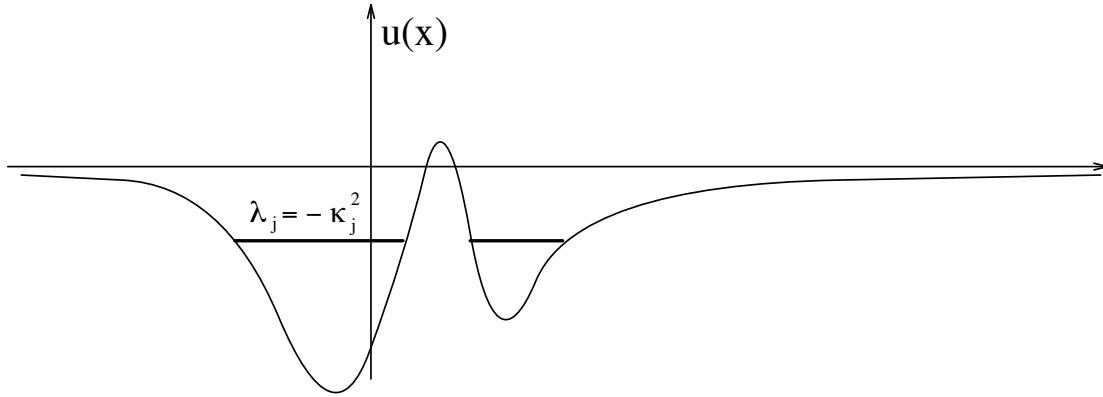


Figure 9: The discrete spectrum

Para el valor de $\lambda = -\kappa^2$ dado en la figura 9, los estados son acotados. Es decir, el dominio de la función de onda $\psi(x, k)$ es (muy probablemente) acotado, y es dado por la restricción:

$$\lambda - u = -\kappa^2 - u > 0 \quad (\text{muy probablemente})$$

Cuando ésto sucede (los estados acotados), la energía está cuantizada, es decir, los valores propios toman valores discretos:

$$\lambda = \lambda_j = -\kappa_j^2 < 0.$$

Como estudiamos el caso $\lambda = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$, debemos pedir: $k_j = i\kappa_j$. Así, tenemos un energía negativa: $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$. Podemos pensar, por ejemplo, en los *estados acotados* de un electrón atrapado por un núcleo de hidrógeno (esto es, recordemos el modelo atómico de Bohr). En este modelo, los estados de los electrones están *cuantizados*, son *discretos*.

Si $\lambda = k^2$ (Figura 10), $\lambda - u = k^2 - u > 0$, para *cualquier* valor de x , de aquí que el electrón en el átomo de hidrógeno de Bohr *no* esté atrapado, es decir, que el estado sea *no* acotado.

En mecánica cuántica, cuando un estado es *no* acotado, se tiene un espectro continuo, esto es, cualquier valor de la energía es un valor permitido. Continuando con la analogía del átomo de hidrógeno, en el caso del estado *no* acotado, el electrón es libre, *no* está atrapado. Cambiar su energía $\lambda_1 > 0$ por otra arbitraria $\lambda_2 > 0$, no altera el estado libre del electrón, pues su energía siempre es positiva. Así, el cambio de energía será siempre en forma continua en el intervalo $\lambda \geq 0$, por lo que el **espectro**, en este caso, es **continuo**.

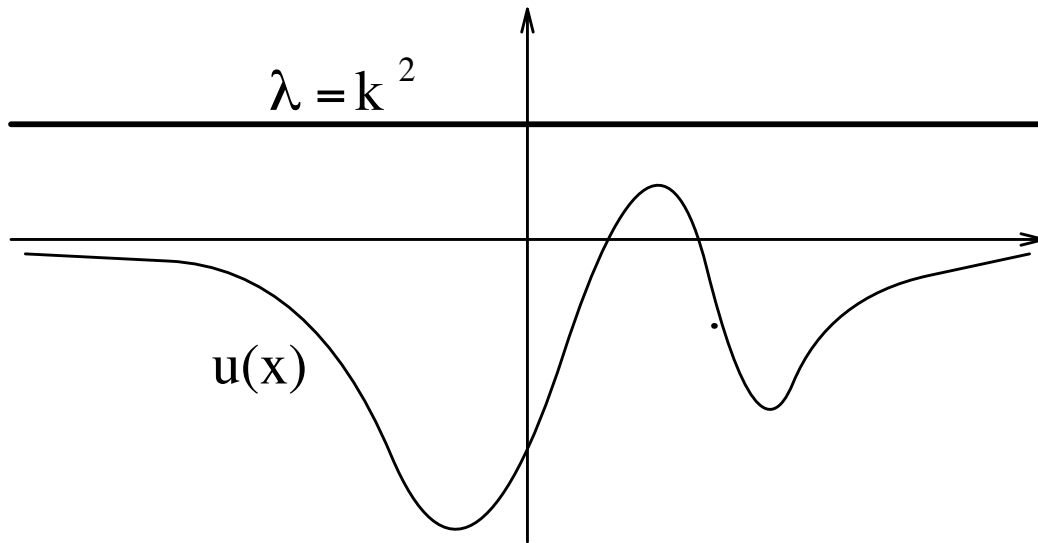


Figure 10: The continuous spectrum

3.4 La Invarianza del Espectro en el Tiempo.

Como mencionamos al final de la sección 3.2, tenemos un problema de dispersión para cada valor del parámetro t . Sin embargo, no conocemos la solución $u(x, t)$ de la ecuación de KdV, por lo que nos gustaría saber si se puede determinar el “potencial” $u(x, t)$ con cierta información dada de antemano que debe, por supuesto, depender de t . La respuesta es que sí es posible encontrar la solución a tal problema, dando como datos “el coeficiente de transmisión”, “las constantes de normalización” (que más adelante definiremos) y ... los *valores propios*. Todos deben ser conocidos en el instante t .

Como veremos a continuación, ¡el espectro es constante en el tiempo t ! De este modo, lo único necesario es encontrar los valores propios en $t = 0$. Esto se puede lograr resolviendo el problema directo:

$$\psi_{xx} + (\lambda(0) - V(x))\psi = 0 \tag{87}$$

Tenemos pues, que a la ecuación de KdV le podemos asociar el problema **lineal** de la ecuación estacionaria de Schrödinger:

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0$$

La función de onda $\psi(x, k)$ es una función de x y de k , y el valor propio λ es una constante (¡en x !). Ahora, el potencial es solución de la ecuación de KdV (70), por lo que depende tanto de la variable espacial x como de la temporal t : $u = u(x, t)$. Así, el tiempo t juega el papel de parámetro en la ecuación de Schrödinger (81):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, k; t) + (\lambda(t) - u(x, t)) \psi(x, k; t) = 0,$$

por lo que no solo la función de onda $\psi(x, k; t)$ puede depender del tiempo, *sino también del valor propio* $\lambda(t)$.

Ahora, nos podríamos hacer la pregunta: ¿cómo evoluciona en el tiempo el valor propio $\lambda(t)$, si el “potencial” $u = u(x, t)$ evoluciona de acuerdo a la ecuación de KdV? La respuesta, como lo mencionamos anteriormente, es bastante sorprendente.

Veamos primero cómo evolucionan en el tiempo los valores propios correspondientes al espectro discreto $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$. Para ello, escribamos $u(x, t)$ de la siguiente forma, usando la ecuación de Schrödinger,

$$u(x, t) = \frac{\psi_{xx}(x, i\kappa_j(t), t)}{\psi(x, i\kappa_j(t), t)} - \kappa_j^2(t).$$

Substituyendo esta expresión de $u(x, t)$ en la ecuación de KdV, tendremos la relación siguiente entre $\psi(x, i\kappa_j(t), t)$ y sus derivadas con la evolución de $-\kappa_j^2(t)$:

$$|\psi_j|^2 \frac{d\kappa_j^2}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right), \quad (88)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_j &= \psi(x, i\kappa_j, t), \\ Q &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (89)$$

y

$$Q_j = Q|_{k=i\kappa_j}.$$

La prueba de la validez de la ecuación (88) será dada en el apéndice D.

Ahora, por ser ψ_j función propia:

$$\psi_j \rightarrow 0, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty. \quad (90)$$

Integrando desde $-\infty$ hasta ∞ la ecuación (88) y usando el comportamiento (90) de la función propia ψ_j , obtenemos

$$\frac{d\kappa_j^2}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx = 0 \quad (91)$$

Además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_j|^2 dx \neq 0,$$

y es convergente, por ser ψ_j función propia. De (91) se concluye que

$$\frac{d\kappa_j}{dt} = 0. \quad (92)$$

Esto es, ¡ $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2(t)$ es una *constante de movimiento*!. Por tanto escribiremos:

$$\kappa_j(t) = \kappa_j(0) = \kappa_j.$$

Ahora, ¿qué pasa con el espectro continuo? Sabemos que el espectro continuo consiste de los valores $\lambda = k^2 > 0$ y esto se cumple *para toda* k real. Ahora, el *espectro continuo siempre es positivo, independientemente* del parámetro t . Por tal motivo,

$$\frac{dk^2}{dt} = 0,$$

¡también es constante de movimiento!. Por lo que escribiremos:

$$\lambda(t) = k^2,$$

sin anotar explícitamente el tiempo para recordar que se trata de una constante de movimiento.

3.5 Evolución de las Funciones de Onda.

Es un hecho también muy sorprendente que podemos “casi” calcular la evolución temporal de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j; t)$ y de las funciones correspondientes al espectro continuo $\psi = \psi(x, k; t)$. Esto nos servirá posteriormente para calcular la evolución temporal de “*las constantes de normalización*” y del “*coeficiente de reflexión*”.

Veamos primero cuál es la ecuación de evolución de las funciones propias. Usando la ecuación de evolución (92) de los valores propios, $\lambda_j = -\kappa_j^2$, en la ecuación (3.19) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) = 0.$$

Integrando con respecto a x se sigue que:

$$\psi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x} - Q_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = D(t),$$

donde $D(t)$ es una función arbitraria del tiempo. Notemos que, dividiendo la ecuación anterior entre ψ_j^2 , la podemos escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q_j}{\psi_j} \right) = \frac{D(t)}{\psi_j^2},$$

que integrando resulta

$$\frac{Q_j}{\psi_j} = D(t) \int_{-\infty}^x \frac{dy}{\psi_j^2} + E(t), \quad (93)$$

donde $E(t)$ es otra función arbitraria del tiempo. Como $\psi_j(y) \rightarrow 0$ exponencialmente, cuando $y \rightarrow \infty$ (ver ecuación (90)), tenemos que $1/\psi_j^2$ *crece exponencialmente*, por lo que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\psi_j^2}$$

es divergente. Ahora, por (93), tendríamos que Q_j diverge cuando $x \rightarrow \infty$. Pero Q_j **no** puede diverger, ya que depende de ψ_j y sus derivadas, por lo que $Q_j \rightarrow 0$, si $x \rightarrow \infty$. Así, debemos escoger $D(t) \equiv 0$ en (93), resultando:

$$Q(x, i\kappa_j : t) = \psi(x, i\kappa_j : t)E(t).$$

Usando la definición (89) de Q :

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = E(t) \psi_j, \quad (94)$$

y tomando $\psi_j = \varphi_j e^{\int E(t) dt}$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + u_x \varphi_j - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0,$$

por lo que, equivalentemente,, podemos escoger $E(t) \equiv 0$ en (94), quedando:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + u_x \psi_j - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = 0 \quad (95)$$

Usando la ecuación de Schrödinger (81) tenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= u - \frac{\psi_{xx}}{\psi}, & \text{y} \\ u_x &= \frac{\psi_{xxx}}{\psi} - \frac{\psi_{xx}\psi_x}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones en la ecuación (95), encontramos que la ecuación de evolución de ψ_j es

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi_j}{\partial x} - 3\psi_j u_x = 0. \quad (96)$$

Definamos al operador B del siguiente modo:

$$B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x. \quad (97)$$

Así, la ecuación de evolución (96) de ψ_j se puede escribir como:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = B[\psi_j] \quad (98)$$

Con un razonamiento análogo, podemos llegar a que las funciones ψ correspondientes al espectro continuo $\lambda = k^2$ cumplen con la ecuación:

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = D(t).$$

Usando la definición (89) de Q y el comportamiento asintótico $\psi \sim e^{ikx}$ en $x \sim \infty$ (ecuación (86)), tenemos que:

$$D(t) = \psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} \sim 0, \quad \text{para } x \sim \infty$$

y, por tanto,

$$D(t) \equiv 0,$$

pues es constante en x . Así, se cumple la ecuación

$$\psi \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Entonces, y de la misma manera como se hizo para el caso discreto, obtenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + 4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial \psi}{\partial x} - 3\psi u_x = 0,$$

o bien,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\psi], \quad (99)$$

es la ecuación de evolución para las funciones $\psi(x, k; t)$ correspondientes al espectro continuo, donde B está definida en (97).

Notemos ahora que, dado que la condición inicial $u(x, 0) = V(x)$ (ecuación (71)) es dada de antemano, en principio podemos resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger en el instante inicial $t = 0$,

$$\psi_{xx}(x, k, 0) + (\lambda(0) - V(x))\psi(x, k, 0) = 0.$$

Esto es, podemos conocer los valores propios, $\lambda(0) = -\kappa_j^2(0)$, y funciones propias, $\psi(x, i\kappa_j, 0)$, en el instante inicial $t = 0$. Es decir, habremos resuelto *el problema de dispersión directa*.

Conocemos la evolución temporal de los valores propios $\lambda(t) = -\kappa_j^2$ pues, como vimos, son constantes de movimiento. Además, podemos también “casi” conocer la evolución en el tiempo de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa_j, t)$ y de las que corresponden al espectro continuo $\psi = \psi(x, k; t)$ (ecuaciones (98) y (99)). Y hacemos énfasis en la palabra *casi*, pues en el operador B (ecuación (97)), aparece la función desconocida $u(x, t)$.

Ahora, con esta información de los valores propios $\lambda_j(t) = \lambda_j = -\kappa_j^2$ (constantes de movimiento), de las funciones propias $\psi_j = \psi(x, i\kappa, t)$ y de las funciones de onda $\psi = \psi(x, k; t)$, ¿podemos conocer el potencial $u(x, t)$? Es decir, ahora queremos resolver el problema inverso: dadas las funciones $\psi(x, i\kappa, t)$, $\psi(x, k; t)$ y los valores propios $\lambda_j(t) = -\kappa_j^2$, determinar el “potencial” $u(x, t)$.

En el año de 1951, Gel'fand y Levitan [GL] encontraron que esto sí es posible. Aún más, no es necesario conocer completamente las soluciones ψ_j y ψ , sino que solo basta conocer “la constante de normalización” $c_j(t)$ de ψ_j , y el comportamiento asintótico de la función ψ en $x \sim \infty$ y $x \sim -\infty$. En estos límites, la función $u(x, t)$ es conocida, por lo que tomando las asintóticas en las ecuaciones de las funciones ψ_j y ψ , (98) y (99), tendremos un medio para conocer la evolución temporal de ψ_j y ψ en ∞ .

Gel'fand y Levitan [GL] se dieron cuenta además que, dando solamente el comportamiento asintótico de las funciones propias, ψ_j , y de onda ψ , las constantes de normalización c_j y los valores propios λ_j , es posible plantear una ecuación integral **lineal** para cierta función $K(x, y)$. De hecho, la ecuación que relaciona el potencial $u(x, t)$ con la función $K(x, y; t)$ es :

$$u(x, t) = -2 \frac{dK}{dx}(x, x; t)$$

Por lo que el problema inverso quedaría resuelto. Los detalles serán dados más adelante.

3.6 Problemas de Dispersión.

Tenemos entonces que la ecuación de Schrödinger nos plantea dos tipos de problemas:

1. **Problema de dispersión directa** o bien **problema espectral**. Dadas $u(x)$ y el comportamiento en el infinito $|x| \rightarrow \infty$, determinar $\psi_j(x)$, $\psi(x)$ y λ_j , *i.e.*, las funciones propias, la función de onda y los valores propios.
2. **Problema de dispersión inversa** Dadas $\psi_j(x)$, $\psi(x)$ y λ_j , determinar el potencial $u(x)$.

Veamos la descripción de un sencillo problema que, en cierto modo, se parece al problema *inverso* de dispersión en mecánica cuántica.

Imaginemos que lanzamos N pelotas desde la derecha sobre algunos obstáculos y valles, cuya forma desconocemos.(Figura 11).

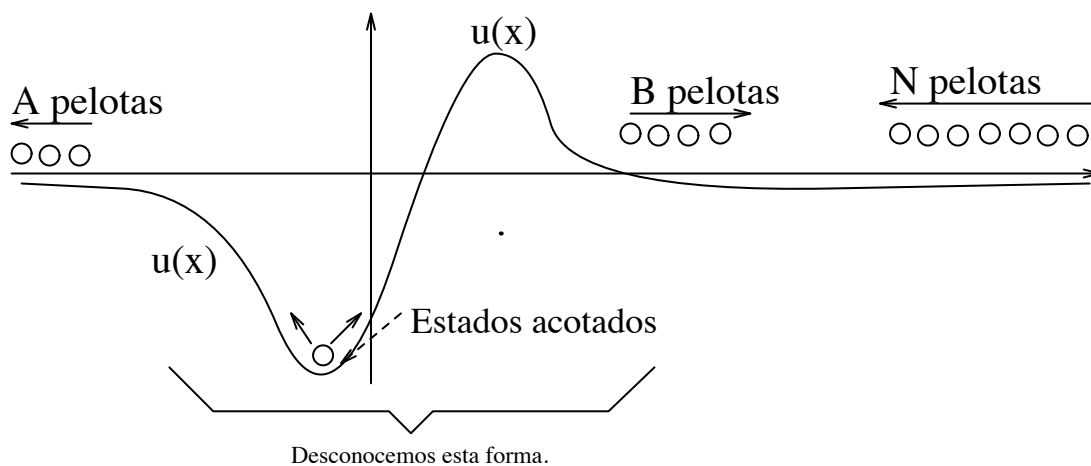


Figure 11: Dispersion problems (descriptive picture)

Lo que deseamos conocer es la forma de los obstáculos y valles, *i.e.*, del potencial $u(x)$. Para tal fin, será necesario conocer el número A de pelotas que que pasan las barreras y el número B de pelotas que rebotan en dichos obstáculos. Además, quedarán otras pelotas atrapadas en los valles. La región de movimiento de estas pelotas atrapadas es finita, lo que constituirá los *estados acotados*, pues la región en que se encuentran es acotada (de otra forma serían estados libres).

Ahora, como mencionamos en la sección anterior, para conocer la forma de $u(x)$, los datos necesarios son A/B (el coeficiente de reflexión, el cual se determina del

comportamiento asintótico de ψ), los valores propios (determinados por los *estados acotados*) y las constantes de normalización (que en este ejemplo no tienen análogo) de las funciones propias $\psi(x, i\kappa_j)$. A estos datos se les conoce como **datos de dispersión**. Más adelante daremos expresiones precisas para los coeficientes de reflexión, las constantes de normalización y de los estados acotados en términos de las soluciones ψ de la ecuación de Schrödinger.

Notemos que el número total de pelotas debe conservarse, esto es, $A + B = N$. O bien:

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1.$$

Esta ecuación lo que nos dice es que lo que se refleja más lo que se transmite, debe de ser siempre el total, la unidad. En términos de la función de onda ψ (solución de la ecuación de Schrödinger), encontraremos una relación similar a ésta.

3.7 La Expresión Integral para la Función de Onda

La expresión (86) es una ecuación integral para la función $\psi(x, k)$, que podemos escribir en la forma:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}\psi, \quad (100)$$

donde \tilde{T} es el operador

$$\tilde{T} \equiv - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \psi(y, k) dy \quad (101)$$

Resolvamos la ecuación (100) por iteraciones. Esto es, substituyamos el valor de ψ dado por (100) en el miembro derecho de esta misma ecuación, resultando:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2\psi.$$

Repetiendo el argumento anterior sucesivamente, eventualmente tendremos una expresión para la solución de la ecuación de Schrödinger (82),

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \tilde{T}e^{ikx} + \tilde{T}^2e^{ikx} + \dots + \tilde{T}^n e^{ikx} + \dots$$

Denotemos por $L(x, y)$ al kernel del operador \tilde{T} definido en (101):

$$L(x, y) \equiv - \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) \quad (102)$$

Así,

$$\tilde{T}\psi(x, k) = \int_x^\infty L(x, y)\psi(y, k) dy$$

Tendremos entonces que:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(x, y)e^{iky} dy + \int_x^\infty L^{(2)}(x, y)e^{iky} dy + \cdots + \int_x^\infty L^{(n)}(x, y)e^{iky} dy + \cdots$$

donde hemos definido

$$L^{(2)}(x, y) = \int_x^y L(x, y_1)L(y_1, y) dy_1,$$

$$L^{(3)}(x, y) = \int_x^y \int_{y_2}^y L(x, y_1)L(y_1, y_2)L(y_2, y) dy_2 dy_1,$$

y, en general,

$$L^{(n)}(x, y) = \int_x^y \int_{y_{n-1}}^y \int_{y_{n-2}}^y \cdots \int_{y_3}^y \int_{y_2}^y L(x, y_{n-1})L(y_{n-1}, y_{n-2}) \cdots L(y_2, y_1)L(y_1, y) dy_1 dy_2 \cdots dy_{n-1}.$$

Notemos que estas integrales definen las desigualdades $x \leq y_{n-1} \leq y_{n-2} \leq \cdots \leq y_2 \leq y_1 \leq y$, por lo que tenemos:

$$x \leq y$$

La serie de Neumann,

$$K(x, y) \equiv L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \cdots + L^{(n)}(x, y) + \cdots \quad (103)$$

define una nueva función $K(x, y)$ en la región $x \leq y$. Si esta serie es uniformemente convergente, entonces:

$$\psi = e^{ikx} + \int_x^\infty (L(x, y) + L^{(2)}(x, y) + \cdots + L^{(n)}(x, y) + \cdots) e^{iky} dy$$

y de la definición (103) de $K(x, y)$:

$$\psi = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y. \quad (104)$$

Esta es la expresión integral para $\psi(x, k)$, solución de la ecuación de Schrödinger (82).

Ahora tenemos que el núcleo $K(x, y)$ depende de cada una de las funciones $L^{(k)}(x, y)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Estas dependen de $L(x, y)$, quien a su vez depende de $u(y)$, por (102). Por tanto, el kernel $K(x, y)$ debe de tener cierta relación con el potencial $u(x)$.

Es importante observar que la solución del problema con $\bar{u}(x) \neq 0$, ¡está dada en términos de las soluciones e^{ikx} del problema libre! Desde luego, hay una relación entre $K(x, y)$ y $u(x)$, pero ésta es explícita, como ahora veremos. Para sustituir la representación (104) de la función ψ en la ecuación (82), necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = & -k^2 e^{ikx} - \frac{dK}{dx}(x, x)e^{ikx} - ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial x}(x, x)e^{ikx} + \\ & + \int_x^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y)e^{iky} dy, \end{aligned}$$

y, por otra, integrando por partes la representación (104) con la suposición adicional que $K(x, y) \rightarrow 0$, si $y \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} k^2\psi(x, k) = & k^2 e^{ikx} + ikK(x, x)e^{ikx} - \frac{\partial K}{\partial y}(x, x)e^{ikx} + \\ & + \int_x^\infty -\frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y)e^{iky} dy. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones anteriores, y usando la regla de la cadena, $\frac{\partial}{\partial x} K(x, x) + \frac{\partial}{\partial y} K(x, x) = \frac{d}{dx} K(x, x)$, se sigue que:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi(x, k) = \left[-2\frac{d}{dx} K(x, x) \right] e^{ikx} + \int_x^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) \right] e^{iky} dy.$$

También tenemos que:

$$u(x)\psi = u(x)e^{ikx} + \int_x^\infty u(x)K(x, y)e^{iky} dy,$$

y como $\frac{d^2}{dx^2}\psi + k^2\psi(x, k) = u(x)\psi$ (ecuación de Schrödinger (82)), de las últimas dos igualdades obtenemos finalmente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x, y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(x, y) = u(x)K(x, y), \quad (105)$$

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (106)$$

La ecuación (106) es la relación buscada entre $u(x)$ y $K(x, y)$. Así, si conocemos $K(x, y)$, podemos conocer el potencial $u(x)$, y el problema inverso quedaría resuelto.

Vale la pena hacer notar que, para resolver el problema directo, esta relación no es tan útil. Si $u(x)$ es dado, hay que resolver la ecuación en derivadas parciales (105) con datos (106) dados sobre la característica $x = y$, lo cual complica el problema. A este problema se le conoce como *el problema de Goursat* [CH], cuyas soluciones también se sabe son únicas, por lo que la función $K(x, y)$ debe de ser única.

En resumen, hay una relación *simple* entre el potencial $u(x)$ y el núcleo $K(x, y)$ de la representación integral (104) de la solución $\psi(x, k)$ de la ecuación de Schrödinger (82), con $u(x) \neq 0$, y en términos de las soluciones e^{ikx} del problema libre.

3.8 Datos de Dispersión.

La utilidad del núcleo $K(x, y)$ es que puede ser determinado a partir de información asintótica. Para esto es conveniente introducir soluciones apropiadas, linealmente independientes, de la ecuación de Schrödinger.

Para tal fin, y usando el mismo razonamiento que en la sección anterior, podemos expresar la otra solución linealmente independiente $\varphi(x, k)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, k) e^{-iky} dy, \quad (107)$$

la cual tiene el siguiente comportamiento asintótico:

$$\varphi \sim e^{-ikx}, \quad \text{en } x \sim -\infty.$$

También, como en la sección anterior, existe una relación sencilla entre el potencial $u(x)$ y el núcleo $L(x, y)$:

$$u(x) = 2 \frac{d}{dx} L(x, x)$$

Introduzcamos aquí, un cambio de notación:

$$f(x, k) \equiv \psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy, \quad (108)$$

$$g(x, k) \equiv \varphi(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, k) e^{-iky} dy, \quad (109)$$

A estas funciones, soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger, se les conoce como **funciones de Jost**.

Podemos tomar la continuación analítica de las **funciones de Jost**, pero esto sólo lo podemos hacer en el plano $\text{Im}(k) > 0$. En efecto, escribiendo:

$$k = \mu + i\kappa,$$

con $\kappa = \text{Im}(k) > 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{ikx} &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\mu x} e^{-\kappa x} = 0, & \text{y} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-i\mu x} e^{\kappa x} = 0, \end{aligned}$$

pues de otro modo las *funciones de Jost* serían divergentes.

Por tanto, k puede ser, en general, un número complejo. De la definición de k , $\lambda = k^2$, se sigue que λ puede ser también un número complejo. Sin embargo, es real (como probaremos en el apéndice A). Esto último como consecuencia directa del hecho que λ es valor propio de la ecuación de Schrödinger. Esto también ya fue utilizado en la sección 3.3, en donde comentamos que la energía $\lambda > 0$ corresponde al espectro continuo, mientras que para los valores $\lambda < 0$ tenemos el espectro discreto. Como vemos, usamos el hecho de que λ es real.

Por todo esto, los valores posibles que puede tomar k son de dos tipos:

1. $k \in \mathbb{R}$. En este caso, $\lambda = k^2$ es real *positivo*, y corresponde al espectro *continuo*.
2. $k = i\kappa$ es imaginario puro, con $\kappa > 0$, pues $\kappa = \text{Im}(k) > 0$. Aquí, $\lambda = -\kappa^2$ también es real, pero negativo. Se trata del *espectro discreto*.

3.9 El Espectro Continuo: el Coeficiente de Reflexión.

Como mencionamos anteriormente, el núcleo $K(x, y)$ puede ser determinado por información asintótica de las funciones de Jost. Dicha información asintótica es el coeficiente de reflexión, que definiremos enseguida.

Tomemos la función de Jost $f(x, k)$ (ecuación (108)) solución de la ecuación de Schrödinger (82). Dicha función tiene el siguiente comportamiento asintótico en el infinito:

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Y, por tanto,

$$f(x, -k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim \infty,$$

es otra solución, linealmente independiente, de la misma ecuación. Como aquí tratamos con el espectro continuo, k es real.

Consideremos ahora $g(x, k)$ y $g(x, -k)$ (ecuación (109)), soluciones también linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger (82), pero con comportamiento:

$$\begin{aligned} g(x, k) &\sim e^{-ikx}, & x \sim -\infty, \\ g(x, -k) &\sim e^{ikx}, & x \sim -\infty \end{aligned}$$

Como la ecuación de Schrödinger es una ecuación de segundo orden, tiene *únicamente* dos soluciones linealmente independientes, y cualquier otra solución estará dada como combinación lineal de la dos primeras. Por tanto:

$$g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k) \quad (110)$$

El comportamiento asintótico de $g(x, k)$ será entonces:

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty. \quad (111)$$

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad x \sim -\infty. \quad (112)$$

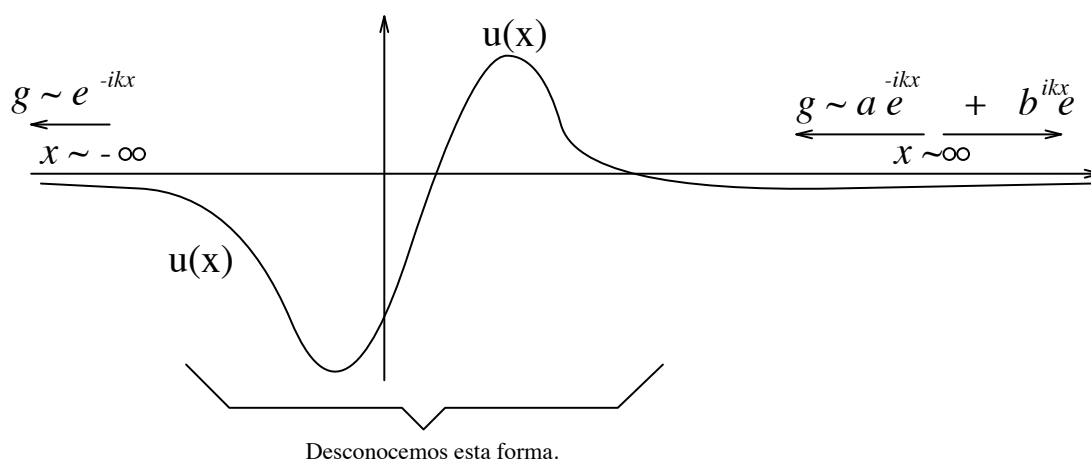


Figure 12: Dispersion problems

Esto significa lo siguiente. (Ver figura 12). Inicialmente mandamos una onda $a(k)e^{-ikx}$ desde $+\infty$, con dirección negativa y amplitud $a(k)$. Como resultado de la interacción de la onda con el potencial, seguirán dos ondas: una transmitida y otra reflejada.

La primera, e^{-ikx} , se dirige hacia $-\infty$ con amplitud 1 y es la onda transmitida. La segunda es la onda reflejada, pues se dirige hacia $+\infty$, llevando ésta una amplitud $b(k)$.

Es un resultado de mecánica cuántica (enseguida lo probaremos) que *las probabilidades se conservan*. La **probabilidad** de que una partícula se encuentre en el intervalo $[a, b]$, está dada por

$$\int_a^b |\psi(x, k)|^2 dx.$$

A la función $|\psi(x, k)|^2$ se le llama **densidad de probabilidad**.

Dado que las probabilidades (las densidades de probabilidad) deben de conservarse, entonces la (densidad de) probabilidad $|a(k)|^2$ que se manda inicialmente, debe de ser igual a la (densidad de) probabilidad 1 que se transmite, más la densidad $|b(k)|^2$ que se refleja. Esto es:

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2,$$

y es la igualdad que debemos probar.

Para ello, veamos que las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger:

$$g(x, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, y) e^{-iky} dy,$$

$$g(x, -k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, y) e^{iky} dy,$$

están relacionadas por:

$$g^*(x, k) = g(x, -k)$$

en vista de que k y $L(x, y)$ son reales ($L(x, y)$ es real, pues $u(x) = 2\frac{dL}{dx}$ es real). Aquí $g^*(x, k)$ denota el complejo conjugado de $g(x, k)$. De igual modo:

$$f^*(x, k) = f(x, -k)$$

Calculemos ahora el Wronskiano de las soluciones $g(x, k)$ y $g^*(x, k)$, y tomemos su comportamiento asintótico en $x \sim \infty$:

$$W(g, g^*) = gg_x^* - g_x g^*$$

$$\sim 2ik(|a|^2 - |b|^2), \quad \text{si } x \sim \infty$$

y en $x \sim -\infty$:

$$\begin{aligned} W(g, g^*) &\sim \det \begin{pmatrix} e^{-ikx} & e^{ikx} \\ -ike^{-ikx} & ike^{ikx} \end{pmatrix} \\ &= 2ik. \end{aligned}$$

Ahora, como el Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger es una constante (la prueba está en el apéndice B), entonces:

$$W(g, g^*)|_{x=\infty} = W(g, g^*)|_{x=-\infty}$$

Por tanto,

$$2ik(|a|^2 - |b|^2) = 2ik,$$

o bien,

$$|a|^2 = |b|^2 + 1,$$

como queríamos probar.

Si $|a|^2 \neq 0$:

$$\frac{1}{|a|^2} + \frac{|b|^2}{|a|^2} = 1$$

Esta es la identidad que define el coeficiente de transmisión $T(k) \equiv \frac{1}{a(k)}$ y de reflexión:

$$R(k) \equiv \frac{b(k)}{a(k)} \tag{113}$$

Tomamos esta definición, pues $T(k) = \frac{1}{a(k)}$ es la proporción de la cantidad reflejada 1, sobre la cantidad o amplitud inicial $a(k)$. Del mismo modo, el coeficiente de reflexión $R(k)$ es la proporción de la amplitud reflejada $b(k)$ a la amplitud inicial $a(k)$: $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$.

La igualdad $|a|^2 = |b|^2 + 1$ es análoga a la planteada para el caso de “conservación de pelotas” que pasan y rebotan por los valles y obstáculos (ejemplo dado en la sección 3.6):

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{N} = 1$$

Tenemos pues, la conservación de probabilidades:

$$\frac{1}{|a(k)|^2} + |R(k)|^2 \equiv 1 \tag{114}$$

3.10 El Espectro Discreto: Estados Acotados, Constantes de Normalización y Valores Propios.

La función g , cuando se continúa analíticamente para $\text{Im}(k) > 0$, determina toda la información sobre el espectro puntual. En efecto, los ceros de la ecuación $a(k_j) = 0$ son los puntos del espectro. Es decir, si $a(k_j) = 0$ tenemos:

$$g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j) \quad (115)$$

donde ρ_j es la **constante de proporcionalidad**.

Para $\text{Im}(k_j) > 0$ sabemos que:

$$\begin{aligned} g(x, k_j) = \rho_j f(x, k_j) &\sim \rho_j e^{ik_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow \infty \\ g(x, k_j) &\sim e^{ik_j x} \rightarrow 0, & \text{cuando } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Así pues, $g(x, ik_j)$ es función propia, con valor propio $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2 < 0$, pues recordemos que los valores propios son *negativos*. Para tal k_j , la función $g(x, k_j)$ representa un estado acotado, esto es, la probabilidad de que una partícula con función de onda $g(x, k_j)$ se encuentre en un intervalo acotado es muy alta, debido al decaimiento exponencial de la función de onda cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Aquí tenemos que $\text{Im}(k_j) > 0$, y que $\lambda_j = k_j^2 = -\kappa_j^2$ es real. Para ello, recordemos que al principio de la sección pedimos que k_j sea imaginario puro:

$$k_j = i\kappa_j$$

Recordemos también que, cuando nos encontramos en la región donde la energía λ_j es negativa, el espectro es discreto. Podemos recordar aquí el espectro discreto del electrón, en el modelo del átomo de Hidrógeno de Bohr. Dicho electrón está atrapado por el núcleo atómico del Hidrógeno, y está en un estado acotado. Así, vemos que todo es consistente. (Figura 13).

La raíz $k = k_j = i\kappa_j$ de la ecuación $a(k) = 0$, es un cero simple pues, como probaremos en el apéndice C,

$$\frac{d}{dk} a(i\kappa_j) = -i\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0,$$

ya que $\rho_j \neq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx \neq 0$, pues queremos soluciones no triviales.

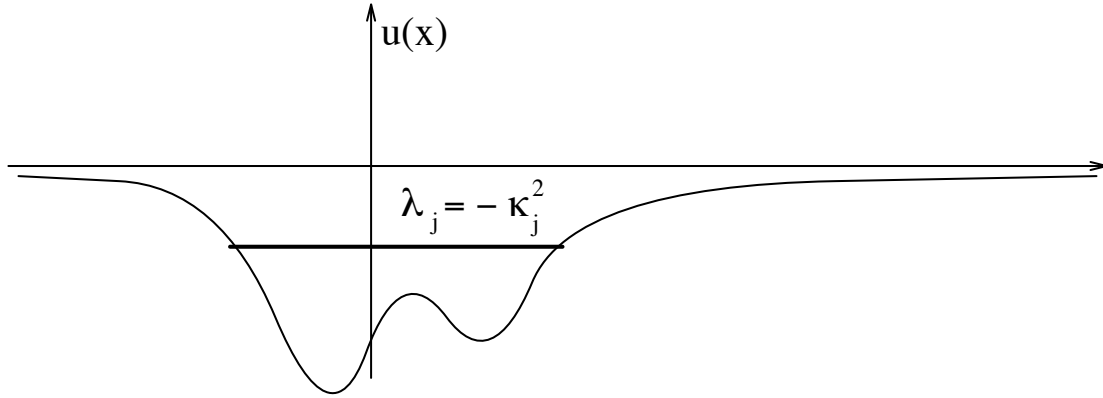


Figure 13: Discrete Spectrum

Además,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} (k - i\kappa_j), \quad \text{por definición de residuo,} \\
 &= \lim_{k \rightarrow i\kappa_j} \frac{k - i\kappa_j}{a(k) - a(i\kappa_j)}, \quad \text{pues } a(i\kappa_j) = 0, \\
 &= \frac{1}{\left. \frac{da}{dk} \right|_{k=i\kappa_j}}. \tag{116}
 \end{aligned}$$

Y así,

$$\operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{i}{\rho_j \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx}. \tag{117}$$

Definiendo c_j del siguiente modo,

$$c_j^2 \equiv \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, i\kappa_j) dx}, \tag{118}$$

podemos escribir

$$\operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)} = \frac{ic_j^2}{\rho_j}, \tag{119}$$

La constante c_j , es **la constante de normalización**, pues normaliza la función de Jost, $f(x, i\kappa_j)$, del siguiente modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [c_j f(x, i\kappa_j)]^2 dx = 1.$$

La relación existente entre la *constante de proporcionalidad* ρ_j y la *constante de normalización* c_j se sigue de las ecuaciones (??) y (119):

$$\rho_j = ic_j^2 \frac{d}{dk} a(i\kappa_j) \quad (120)$$

De aquí que es *equivalente* dar c_j^2 ó ρ_j .

Ahora, si $u \rightarrow 0$ suficientemente rápido, cuando $|x| \rightarrow \infty$, tenemos el siguiente teorema.

Theorem 3.1. *El número de raíces de la ecuación $a(k) = 0$ es finito.*

Prueba: Esto es una consecuencia de la continuación analítica de las expresiones integrales de las funciones de Jost:

$$\begin{aligned} f(x, k) &= e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, k) e^{iky} dy, \\ g(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, k) e^{-iky} dy. \end{aligned}$$

Para $|k| \rightarrow \infty$, las integrales se anulan, por el lema de Riemann-Lebesgue (si $K(x, y)$ y $L(x, y)$ son absolutamente integrables). Así, cuando $|k| \sim \infty$, con $\text{Im}(k) > 0$,

$$\begin{aligned} f(x, k) &\sim e^{ikx} \\ g(x, k) &\sim e^{-ikx}. \end{aligned}$$

Sabemos que el Wronskiano de f y g está dado por (apéndice B):

$$W(f(x, k), g(x, k)) = -2ika(k) \quad (121)$$

de donde:

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g) \quad (122)$$

Si $|k| \sim \infty$:

$$a(k) = \frac{i}{2k} W(f, g) \sim \frac{i}{2k} W(e^{ikx}, e^{-ikx}) = 1 \quad (123)$$

Entonces:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |a(k)| = 1. \quad (124)$$

Por tanto, los ceros de $a(k) = 0$ deben de estar en una región acotada D del plano complejo. Si el número de ceros es infinito, todos ellos deben de estar en D , y tendrán al menos un punto de acumulación. Si $a(k)$ es analítica en D , de la unicidad de las funciones analíticas se sigue que $a(k) \equiv 0$ en D . Ahora, por continuación analítica, $a(k) \equiv 0$ en todo el plano complejo \mathbb{C} . Pero en este caso $\lim_{k \rightarrow \infty} |a(k)| = 0$, lo cual contradice la igualdad (124). Por tanto el número de ceros de $a(k) = 0$ debe de ser finito. *Q.E.D.*

El hecho de que $|a(k)| \rightarrow 1$, cuando $|k| \rightarrow \infty$, es sencillo de entender en términos de dispersión de ondas en mecánica cuántica. Recordemos que el momentum \mathbf{p} está relacionado directamente con el número de onda \mathbf{k} : $\mathbf{p} \sim \mathbf{k}$.

Si una partícula se mueve con gran velocidad, o momentum \mathbf{p} , será difícil que se refleje, y sí muy fácil de que se transmita totalmente:

$$\begin{aligned} |b(k)| &\rightarrow 0, & \text{y} \\ |a(k)| &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

esto si $\mathbf{p} \rightarrow \infty$, es decir, si $\mathbf{k} \rightarrow \infty$.

Tenemos pues que la ecuación $a(k) = 0$ tiene un número finito de ceros $k = i\kappa_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, con $\lambda_j = -\kappa_j^2$ como *valores propios*. Las constantes de proporcionalidad ρ_j y de normalización c_j están dadas por las ecuaciones (118) y (120).

3.11 La Ecuación de Gel'fand-Levitan.

La ecuación de Gel'fand-Levitan es una ecuación integral **lineal** para la función $K(x, y)$ en la región $x \leq y$, quien determina la función de Jost $f(x, k)$ bajo la transformación integral (108). Como veremos, dicha ecuación estará determinada por el coeficiente de reflexión $R(k)$, por los valores propios $\lambda_j = -\kappa_j^2$ y por las constantes de normalización c_j (o por las constantes de proporcionalidad ρ_j) los cuales constituyen los **datos de dispersión**.

Partimos de la ecuación (110):

$$g(x, k) = a(k)f(x, -k) + b(k)f(x, k)$$

Dividiendo entre $a(k)$,

$$\frac{g(x, k)}{a(k)} = f(x, -k) + \frac{b(k)}{a(k)} f(x, k) \quad (125)$$

Recordemos que hemos tomado la continuación analítica de k , para $\text{Im}k > 0$. Consideremos una curva cerrada \mathcal{C} que consta de un semicírculo de radio A y centro en $k = 0$, en el semiplano complejo $\text{Im}k \geq 0$, y el segmento que inicia en $-A$ y termina en A . (Figura 14).

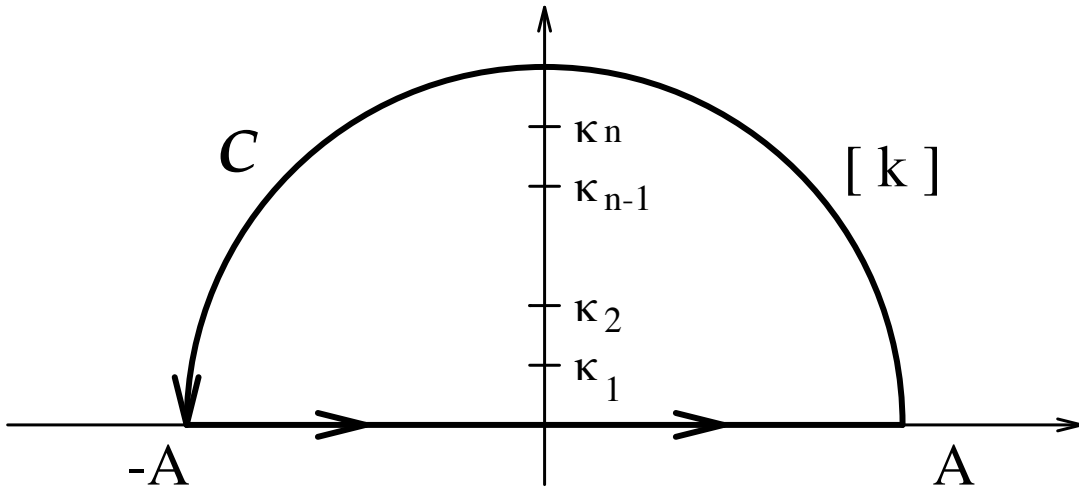


Figure 14: The discrete spectrum: poles in the complex plane

Tomemos A suficientemente grande de tal modo que contenga a todos los ceros de $a(k)$: $k_j = i\kappa_j, j = 1, 2, 3, \dots, n$. Multiplicando (125) por e^{iky} para $y > x$, e integrando sobre \mathcal{C} , tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = \oint_{\mathcal{C}} f(x, -k) e^{iky} dk + \oint_{\mathcal{C}} R(k) f(x, k) e^{iky} dk,$$

donde $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ es el coeficiente de reflexión. Ahora, la última ecuación se puede escribir como:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

donde:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \oint_c \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk, \\
 I_2 &= \oint_c f(x, -k) e^{iky} dk, \\
 I_3 &= \oint_c R(k) f(x, k) e^{iky} dk.
 \end{aligned}$$

Calculemos I_1 :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \oint_c \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} dk = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{g(x, k)}{a(k)} e^{iky} = \\
 &= 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \operatorname{Res}_{k=i\kappa_j} \frac{1}{a(k)}
 \end{aligned}$$

De la ecuación (119) tenemos:

$$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} g(x, i\kappa_j) \frac{i c_j^2}{\rho_j}$$

y de (115):

$$I_1 = -2\pi \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} c_j^2 f(x, i\kappa_j) \tag{126}$$

Por otra parte, usando la representación integral de f (ecuación (108)), tenemos:

$$f(x, i\kappa_j) = e^{-\kappa_j x} + \int_x^\infty K(x, z) e^{-\kappa_j z} dz,$$

que sustituyendo en (126):

$$I_1 = -2\pi \left(G(x+y) + \int_x^\infty G(y+z) K(x, z) dz, \right)$$

donde:

$$G(s) \equiv \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j s} c_j^2$$

Calculemos ahora I_2 . Usando (108):

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_C e^{ik(y-x)} dk + \oint_C \left(\int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \\ &= \oint_C \left(\int_x^\infty K(x, z) e^{ik(y-z)} dz \right) dk \end{aligned}$$

pues la función exponencial es analítica. Tomando el límite cuando $A \rightarrow \infty$:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} K(x, z) e^{ik(y-z)} dz dk,$$

ya que la integral sobre el semicírculo se anula cuando $A \rightarrow \infty$, pues $y-z > x-z > 0$, es la región donde está definida $K(x, z)$ y $\text{Im}(k) > 0$.

Ahora, como $y > x$, y usando el teorema de inversión de Fourier obtenemos:

$$I_2 = 2\pi K(x, y)$$

Finalmente, usando la expresión integral de $f(x, k)$, calculemos I_3 :

$$I_3 = \oint_C R(k) e^{ik(x+y)} dk + \oint_C \left(\int_x^\infty R(k) K(x, z) e^{ik(y+z)} dz \right) dk.$$

Si $A \rightarrow \infty$, las integrales se anulan sobre los semicírculos (por la misma razón que antes), resultando:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^{\infty} K(x, z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ik(y+z)} dk \right) dz,$$

donde usamos el teorema de Fubini.

Llamando

$$H(s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{iks} dk \quad (127)$$

a la transformada inversa de Fourier de $R(k)$, entonces

$$I_3 = H(x+y) + 2\pi \int_x^\infty K(x,z)H(y+z) dz.$$

Así, la ecuación:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

es:

$$K(x,y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x,z)F(y+z) dz = 0 \quad (128)$$

en la región:

$$x \leq y$$

y donde

$$F(s) \equiv G(s) + H(s) = \sum_{j=1}^n e^{-\kappa_j y} c_j^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iks} dk \quad (129)$$

La ecuación (128) es **la ecuación de Gel'fand-Levitan**. También se le conoce como **ecuación de Marchenko**. Es un ecuación integral para $K(x,y)$ en $x \leq y$. Si consideremos $F(s)$ como dada, el problema es ahora resolver una ecuación **lineal** (lo cual simplifica infinitamente el problema). Esto es, dados *los valores propios* $\lambda_j = -\kappa_j^2$, *las constantes de normalización* c_j *y el coeficiente de reflexión* $R(k)$ (i.e., dados **los datos de dispersión**), estará dada $F(s)$.

Resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan es encontrar $K(x,y)$ para $x \leq y$, lo cual nos llevará inmediatamente al *cálculo del potencial*, a través de la relación (3.37):

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x,x)$$

Esto es, ¡recuperamos el potencial de la ecuación de Schrödinger!

3.12 Evolución Temporal de los Datos de Dispersión.

Como mencionamos en la sección 3.4, los valores propios son constantes de movimiento (3.23):

$$\frac{d\kappa_j}{dt} = 0,$$

y las funciones de Jost f y g (soluciones a la ecuación de Schrödinger) evolucionan de acuerdo a la ecuación ((98) y (99)):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B[\varphi] \quad (\text{con } \psi = f \text{ ó } g),$$

tanto para el espectro discreto (funciones de Jost f y g evaluadas en $k = i\kappa_j$) como para el continuo. El operador B está dado por (ecuación (97)):

$$B[\varphi] \equiv -4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 3\varphi u_x.$$

Pero como hicimos notar en las secciones anteriores, solo es necesario el comportamiento asintótico de las funciones de Jost en $|x| \sim \infty$. Esto nos dará la evolución temporal de los datos de dispersión:

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \kappa_j(t) = \kappa_j(0) \quad (\text{ya conocemos esta evolución}), \\ R &= R(k, t), \\ c_j &= c_j(t). \end{aligned}$$

Podemos así, encontrar una solución:

$$K = K(x, y; t)$$

a la ecuación de Gel'fand-Levitan, y encontraremos el *potencial'* de la ecuación de Schrödinger en todo instante:

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t),$$

¡que es la solución a la ecuación de Korteweg-deVries!

Esto nos da un método, **el método de dispersión inversa**, para resolver la ecuación de KdV, ¡la cual es muy difícil de resolver directamente!. Por ejemplo, podemos buscar soluciones del tipo de onda viajera:

$$u(x, t) = u(x - ct),$$

la cual, como veremos posteriormente, también se encuentra con el método de dispersión inversa. Pero hay otras soluciones que pueden ser encontradas usando dispersión inversa, ¡que **no** pueden ser encontradas usando la suposición de onda viajera! También, como vimos en la sección 3.2, los intentos de linealizar la ecuación de KdV resultaron ser infructuosos.

Así pues, vemos que el **método de dispersión inversa** resulta ser muy poderoso. Calculemos así, la evolución temporal de *las constantes de proporcionalidad* ρ_j y del *coeficiente de reflexión* $R(k)$, para poder determinar completamente la función $F(s; t)$ en todo instante t .

Notemos que la asintótica de la ecuación (98) es:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi_j}{\partial x^3}, \quad (130)$$

pues $u, u_x \sim 0$ en este límite y ψ_j es una función propia de la ecuación de Schrödinger (82) (no necesariamente la función de Jost $f(x, i\kappa_j, t)$). Consideremos la función de Jost $g(x, i\kappa_j, t)$. Como también es solución a la ecuación de Schrödinger (82), g_j y ψ_j son proporcionales:

$$\psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)g(x, i\kappa_j, t) \quad (131)$$

Si escribimos $h_j = h(i\kappa_j, t)$ y substituyendo en (130) obtenemos:

$$\frac{dh_j}{dt} = -4\kappa_j^3 h_j, \quad (132)$$

donde usamos el comportamiento asintótico $g_j \sim \rho_j e^{-\kappa_j x}$ en $x \sim \infty$. Ahora, como g_j y f_j , son proporcionales, la ecuación (131) se puede también escribir como:

$$\psi(x, i\kappa_j, t) = h(i\kappa_j, t)\rho_j f(x, i\kappa_j, t) \quad (133)$$

Tomando nuevamente la asintótica de (98) en $x \sim \infty$, pero con ψ_j como en (133) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}(h_j \rho_j) = 4\kappa_j^3 \rho_j h_j$$

Usando (132), se sigue

$$\frac{d\rho_j}{dt} = 8\kappa_j^3 \rho_j h_j,$$

la cual describe la evolución temporal de la constante de proporcionalidad ρ_j y tiene solución:

$$\rho_j(t) = \rho_j(0)e^{8\kappa_j^3 t}.$$

Pero quienes aparecen en la ecuación de Gel'fand-Levitan son las constantes de normalización $c_j^2(t)$, relacionadas con ρ_j según la ecuación (120):

$$c_j^2(t) = -\frac{i\rho_j(t)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)} = -\frac{i\rho_j(0)}{\frac{d}{dk}a(i\kappa_j)}e^{8\kappa_j^3 t},$$

por lo que

$$c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}$$

es la evolución temporal de $c_j^2(t)$.

La evolución temporal del coeficiente de reflexión se encuentra de un modo similar. La asintótica de la ecuación (99) en $x \sim -\infty$ es:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

Si escogemos ψ proporcional a g ,

$$\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t),$$

obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -4ik^3 h.$$

Tomando ahora la asintótica (99) en $x \sim \infty$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \sim -4 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$$

con $\psi(x, k, t) = h(k, t)g(x, k, t)$, obtenemos, usando (111):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(ha) &= -4ik^3(ha) \\ \frac{\partial}{\partial t}(hb) &= 4ik^3(hb) \end{aligned}$$

Y de la ecuación de evolución de h , se sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= 8ik^3 b \end{aligned}$$

¡Obtenemos nuevamente otra constante de integración $a(k, t)$! Además, como la evolución temporal de $b(k, t)$ es *muy* sencilla, la evolución temporal del coeficiente de reflexión también será realmente sencilla:

$$R(k, t) = \frac{a(k, 0)}{b(k, 0)} e^{8ik^3 t},$$

o bien,

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}. \tag{134}$$

Conocemos entonces $c_j^2(t)$, $\lambda_j = -\kappa_j^2$ y $R(k, t)$ en todo instante t , por lo que el núcleo $F(s, t)$ de la ecuación de Gel'fand-Levitan está bien determinado:

$$F(s, t) = \sum_{j=1}^n c_j^2(t) e^{-\kappa_j s} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{iks} dk$$

La ecuación de Gel'fand-Levitan será

$$K(x, y; t) + F(x + y; t) + \int_x^{\infty} K(x, z; t) F(y + z; t) dz = 0$$

cuya solución $K(x, y; t)$ determina la función de Jost $f(x, k; t)$,

$$f(x, k; t) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x, y; t) e^{iky} dy \quad \text{en } x \leq y.$$

solución a la ecuación de Schrödinger y también determina el *potencial*

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t)$$

¡solución a la ecuación de KdV!

3.13 Esquema del Método de Dispersión Inversa.

Podemos dar aquí un esquema del funcionamiento del *método*, el cual es realmente sorprendente, ¡pues es un análogo no lineal de la transformada de Fourier! Para ello, recordemos cómo funciona la transformada de Fourier.

Por ejemplo, resolvamos la ecuación de onda

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Usando la transformada de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} + k^2 \tilde{u} &= 0, \\ \tilde{u}(k, 0) &= \tilde{f}(k), \\ \tilde{u}_t(k, 0) &= \tilde{g}(k). \end{aligned}$$

que es un ecuación ordinaria en t para la función $\tilde{u}(k, t)$ y cuya solución es

$$\tilde{u}(k, t) = \cos(kt)\tilde{f}(k) + \frac{\sin(kt)}{k}\tilde{g}(k).$$

Lo que permitió encontrar esta solución es que la evolución en el tiempo es *simple*, por ser desacoplada de la variable espacial x .

Invirtiendo esta última ecuación obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds.$$

Gráficamente, representamos este método en la figura 15.

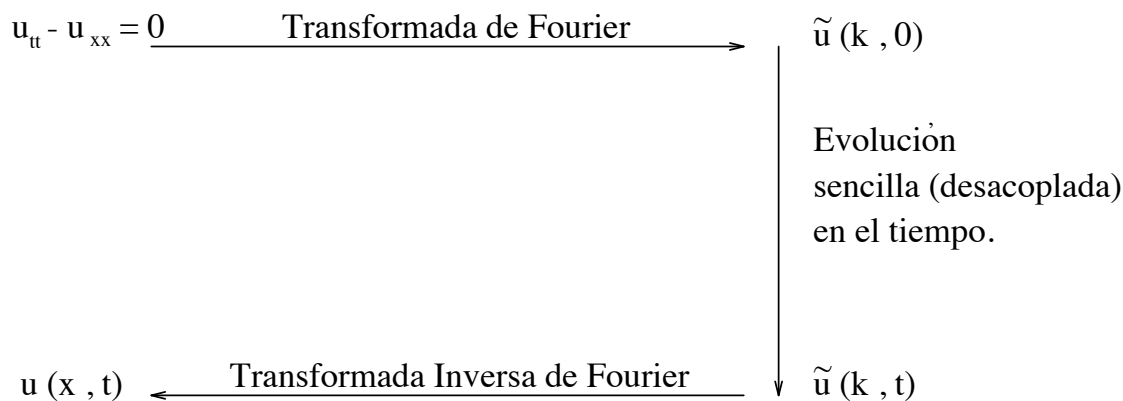


Figure 15: Fourier Transform

El problema de resolver la ecuación de KdV mediante el *método de dispersión inversa*, tiene el mismo esquema que de resolver un problema lineal usando la transformada de Fourier. La diferencia consiste que con la transformada de Fourier se obtiene una transformada $\tilde{u}(k, t)$ de la incógnita $u(x, t)$, mientras que en el problema de KdV trabajamos con los datos de dispersión

$$S_n(k, t) = \{\lambda_j(t), c_j^2(t), R(k, t), \text{ donde } j = 1, 2, 3, \dots, n.\}.$$

En el instante inicial conocemos $u(x, 0) = V(x)$, lo que nos permite conocer por dispersión directa (i.e., resolviendo la ecuación de Schrödinger con el potencial $V(x)$) los datos de dispersión $S_n(k, 0)$ en el instante inicial $t = 0$.

Sabemos además, cómo evolucionan los datos de dispersión en el tiempo t :

$$S_n(k, t) = \{ \lambda_j(t) = \lambda_j(0), c_j^2(t) = c_j^2(0)e^{8\kappa_j^3 t}, j = 1, \dots, n, R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t}, k \in \mathbb{R} \}$$

Usando ahora la ecuación de Gel'fand-Levitan, resolvemos el problema de *Dispersión Inversa*, esto es, encontraremos el potencial $u(x, t)$. El esquema del método se da en la figura 16.

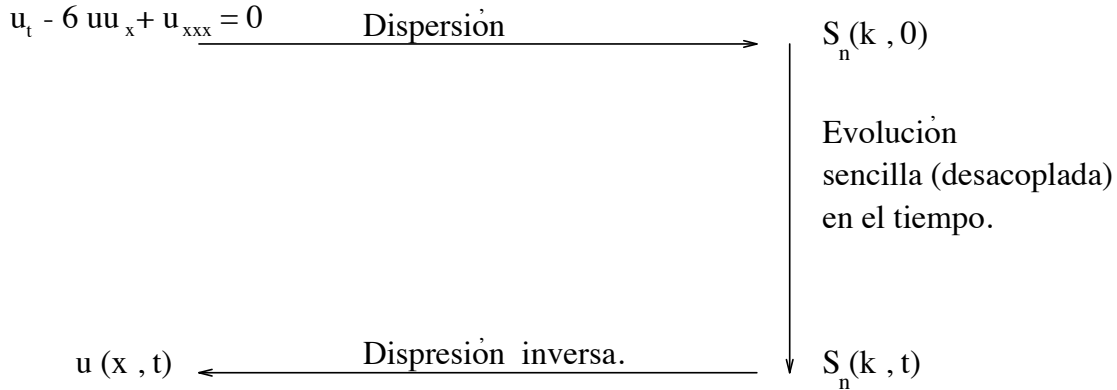


Figure 16: Inverse scattering method

Debido a esta analogía, el método lleva también el nombre de *Transformada de Dispersión Inversa*, aunque no tratemos con alguna transformada para la función $u(x, t)$.

3.14 Ejemplo.

Queremos resolver la ecuación de KdV (70):

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{135}$$

sujeta a la condición:

$$u(x, 0) = -2\kappa^2 \text{sech}^2(\kappa x) \tag{136}$$

como perfil inicial. La ecuación que debemos resolver corresponde a resolver el problema directo de dispersión o problema de valores propios

$$\psi_{xx} + (k^2 + 2\kappa^2 \text{sech}^2(\kappa x))\psi = 0 \tag{137}$$

donde ψ es una función de x y k , evaluada en $t = 0$, $\psi(x, k, 0)$, y cuyo dominio es $-\infty < x < \infty$.

Tomando el siguiente cambio de variable

$$\begin{aligned}\xi &= \tanh(\kappa x), \\ \varphi(\xi) &= \psi(x(\xi)),\end{aligned}\tag{138}$$

tenemos que su dominio es $-1 < \xi < 1$ y

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dx} &= \kappa(1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right)\end{aligned}$$

Así, la ecuación de Schrödinger es

$$\kappa^2(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + [2\kappa^2(1 - \xi^2) + k^2]\varphi = 0.\tag{139}$$

Dividiendo entre $\kappa^2(1 - \xi^2)$,

$$\frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[2 + \frac{k^2}{\kappa^2(1 - \xi^2)} \right] \varphi = 0.\tag{140}$$

Ahora, la ecuación,

$$\frac{d}{dz} \left((1 - z^2) \frac{dw}{dz} \right) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{(1 - z^2)} \right] w = 0,\tag{141}$$

es la ecuación asociada de Legendre [Lev]. Para que la ecuación (140) de Schrödinger sea la asociada de Legendre (141), se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\nu(\nu + 1) &= 2 \\ k_m^2 &= -\kappa^2 m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

De la primer ecuación, $\nu = 1$ ó -2 . Pero $\nu = -2$ es un polo de las funciones asociadas de Legendre $w(z) = P_n^m(z)$ soluciones de (3.72). Por tanto,

$$\nu = 1.$$

Ahora, $m \neq 0$, pues queremos encontrar valores propios $\lambda_m = -\kappa^2 m^2 \neq 0$. Además, como $\nu = n = 1$ debe ser natural y se debe de cumplir la desigualdad:

$$0 < m \leq \nu = 1,$$

resulta forzosamente $m = 1$ y tenemos por tanto un único valor propio:

$$\lambda_1 = -\kappa^2.$$

Así, la función de onda $\varphi(\xi)$, solución de la ecuación 140 de Schrödinger debe de ser proporcional a la función asociada de Legendre $P_{\nu=1}^{m=1}(\xi)$:

$$\varphi(\xi) \sim w(\xi) = P_{\nu=1}^{m=1}(\xi) = -2(1 - \xi^2)^{1/2}$$

Como $\xi = \tanh \kappa x$, entonces:

$$\psi(x) \sim -2 \operatorname{sech} \kappa x$$

Pero recordando el comportamiento asintótico

$$f(x, i\kappa) \sim e^{-\kappa x}, \quad \text{si } x \sim \infty,$$

se tiene que

$$f(x, i\kappa) = \frac{1}{2} \operatorname{sech} \kappa x$$

y la función ψ debe de ser proporcional a la función de Jost f ,

$$\psi(x, k) = c f(x, i\kappa) = \frac{c}{2} \operatorname{sech} \kappa x,$$

donde c es la constante de normalización por determinar. Para ello, pedimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{c^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sech} \kappa x|^2 dx = 1.$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \kappa x dx = \frac{1}{\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (\tanh \kappa x) dx = \frac{2}{\kappa},$$

entonces se sigue

$$c = \sqrt{2\kappa}. \tag{142}$$

Tenemos así el valor propio λ y la constante de normalización c en el instante inicial $t = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -\kappa^2 \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa} \end{aligned}$$

En lo que sigue, seguiremos [LL3]. Falta entonces encontrar el coeficiente de reflexión $R(k, 0)$. Para ello notemos que la ecuación (139) se puede escribir como

$$(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} \left((1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) + \left[\nu(\nu + 1)(1 - \xi^2) - \left(\frac{ik}{\kappa} \right)^2 \right] \varphi = 0 \quad (143)$$

donde hemos puesto $\nu(\nu + 1) = 2$.

Efectuando la substitución

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi^2)^{\frac{ik}{2\kappa}} \chi(\xi), \quad (144)$$

llegamos a la ecuación

$$- \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) \chi(\xi) - 2 \left(\frac{ik + \kappa}{\kappa} \right) \xi \chi'(\xi) + (1 - \xi^2) \chi''(\xi) = 0. \quad (145)$$

Usando el cambio de variables,

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - 2\eta, \\ H(\eta) &= \chi(\xi(\eta)), \end{aligned} \quad (146)$$

tenemos que la ecuación (145) es:

$$- \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right) H(\eta) + \left(\frac{ik}{\kappa} + 1 \right) (1 - 2\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0. \quad (147)$$

Si tomamos

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{ik}{\kappa} + 1, \\ \alpha + \beta + 1 &= 2 \left(\frac{ik}{\kappa} + 1 \right), \\ \alpha\beta &= \left(\frac{ik}{\kappa} - \nu \right) \left(\frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \right), \end{aligned} \quad (148)$$

entonces la ecuación (147) resulta ser

$$-\alpha\beta H(\eta) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\eta) H'(\eta) + \eta(1 - \eta) H''(\eta) = 0,$$

la cual es la ecuación hipergeométrica, cuya solución es

$$H(\eta) = F(\alpha, \beta, \gamma; \eta).$$

Usando (146), (144) y (138), obtenemos

$$\psi(x, k) = \psi_0(\operatorname{sech}\kappa x)^{\frac{ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(x)) \quad (149)$$

donde $\eta(x) = \frac{1-\tanh\kappa x}{2}$ y ψ_0 es una constante por determinar.

Del sistema (148) se sigue

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta_1 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma_1 &= \frac{ik}{\kappa} + 1. \end{aligned}$$

Nota. También podemos escoger:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{ik}{\kappa} + (\nu + 1) \\ \beta_2 &= \frac{ik}{\kappa} - \nu \\ \gamma_2 &= \frac{ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

pero recordemos:

$$F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \eta) = F(\beta_2, \alpha_2, \gamma_2; \eta) = F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta)$$

por lo que tenemos la misma solución. *Fin de la nota.*

Una posible solución es

$$f^*(x, k) = f_0^* (\operatorname{sech}\kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

Si $f_0^* = 2^{\frac{-ik}{\kappa}}$, entonces, para $x \sim \infty$:

$$f^*(x, k) \sim e^{-ikx} F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0)$$

Pero

$$F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; 0) = 1$$

y así se tiene que

$$f(x, k) = 2^{\frac{ik}{\kappa}} (\operatorname{sech}\kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F^*(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \eta(x))$$

es una solución con comportamiento asintótico

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty.$$

Ahora, como la ecuación de Schrödinger (137) es invariante si se toman las sustituciones $k \rightarrow -k$ ó $x \rightarrow -x$, podemos tener otra solución $g(x, k)$. Haciendo dichas sustituciones en la solución (149):

$$g(x, k) \equiv \psi(-x, -k) = g_0(\operatorname{sech}\kappa x)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x))$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-ik}{\kappa} - \nu, \\ \beta &= \frac{-ik}{\kappa} + (\nu + 1), \\ \gamma &= \frac{-ik}{\kappa} + 1 \end{aligned}$$

y

$$\eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Tomando $g_0 = 2^{\frac{ik}{\kappa}}$ y como $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$,

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty.$$

Entonces $g(x, k)$ está dada por:

$$g(x, k) = \left(\frac{\operatorname{sech}\kappa x}{2} \right)^{\frac{-ik}{\kappa}} F(\alpha, \beta, \gamma; \eta(-x)). \quad (150)$$

Ahora, para encontrar el coeficiente de reflexión $R(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$, debemos tomar la asintótica de $g(x, k)$ cuando $x \sim \infty$, pues determina los factores $a(k)$ y $b(k)$ (ecuación (111)):

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, \quad x \sim \infty.$$

Para tal fin, recordemos que la función hipergeométrica puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z), \end{aligned}$$

donde

$$z \equiv \eta(-x) = \frac{1 + \tanh \kappa x}{2}.$$

Para $x \sim \infty$, se tiene $z \sim 1$:

$$\begin{aligned} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta; 1 - z) &\sim 1 \\ F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - z) &\sim 1 \end{aligned}$$

y también

$$1 - z \sim e^{-2\kappa x}.$$

Así, si $x \sim \infty$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-2ikx} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

pues $\gamma - \alpha - \beta = \frac{ik}{\kappa}$. De aquí, la asintótica de $g(x, k)$ (3.81) en $x \sim \infty$ es

$$g(x, k) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{-ikx} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} e^{ikx}.$$

Comparando con (111), el coeficiente de reflexión es

$$R(k) = \frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)},$$

con módulo cuadrado

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Ahora,

$$\left| \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)} \right|^2 = v \left| \frac{\Gamma(\frac{ik}{\kappa})}{\Gamma(\frac{-ik}{\kappa})} \right|^2 = 1,$$

pues $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sin(\pi y)}$, para y real. Así,

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2.$$

Usando $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ y $\Gamma(\frac{1}{2} + z)\Gamma(\frac{1}{2} - z)$ y usando el hecho que $\nu = 1$, podemos escribir:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{(-\frac{ik}{\kappa} + 1)\frac{ik}{\kappa}\Gamma^2(\frac{-ik}{\kappa})}{\pi(\frac{ik}{\kappa} + 1)} \right|^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

Así, $iu(x, 0) = 2\kappa^2 \operatorname{sech} \kappa x$ es un potencial sin reflexión!:

$$|R(k)|^2 \equiv 0$$

Conocemos ya los datos de dispersión en el instante $t = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda(0) &= -\kappa^2, \\ c(0) &= \sqrt{2\kappa}, \\ R(k) &\equiv 0.\end{aligned}$$

Ahora viene el paso importante: *podemos conocer la evolución en el tiempo de los datos de dispersión*. Como sabemos, están dados en términos muy sencillos:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= -\kappa^2 \quad (!\text{constante de movimiento!}) \\ c(t) &= \sqrt{2\kappa} e^{4\kappa^3 t} \\ R(k) &\equiv 0\end{aligned}$$

Ahora, la expresión (129) de $F(s; t)$ está dada por

$$F(s; t) = 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa s},$$

por lo que la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa(x+y)} + 2\kappa e^{8\kappa^3 t} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Busquemos soluciones del tipo degenerado:

$$K(x, y; t) = A(x; t) e^{-\kappa y}.$$

Entonces, la ecuación de Gel'fand-Levitan se reduce a,

$$A(x; t) + 2\kappa e^{8\kappa^3 t - \kappa x} + e^{8\kappa^3 t - 2\kappa x} A(x; t) = 0,$$

la cual es una ecuación algebraica para $A(x; t)$. Entonces,

$$A(x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa x}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}},$$

por lo que el kernel de la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t + \kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

De este modo,

$$K(x, x; t) = \frac{-2\kappa e^{8\kappa^3 t}}{e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}K(x, x; t) &= \frac{(2\kappa)^2 e^{8\kappa^3 t + 2\kappa x}}{(e^{2\kappa x} + e^{8\kappa^3 t})^2}, \\ &= \kappa^2 \left(\frac{2}{e^{\kappa x - 4\kappa^3 t} + e^{-(\kappa x - 4\kappa^3 t)}} \right), \\ &= \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t). \end{aligned}$$

Entonces la solución a la ecuación de Korteweg-deVries (70) con condición inicial (71) es

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx}K(x, x; t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t).$$

Esta solución también se puede recuperar proponiendo soluciones del tipo de onda viajera $u(x, t) = u(x - ct)$ como lo mencionamos anteriormente. Sin embargo, para perfiles iniciales de la forma

$$V(x) = -N(N + 1)\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x,$$

tendremos también un potencial sin reflexión, $R(k) \equiv 0$, con N valores propios,

$$\lambda_m = -(m\kappa)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N,$$

dando esto como resultado soluciones mucho más complicadas ¡que *no* pueden ser recuperadas con la sencilla suposición de onda viajera! Por ejemplo, si $N = 2$, la solución a la ecuación de KdV será:

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \cosh 2\kappa(x - 4\kappa^2 t) + \cosh 4\kappa(x - 16\kappa^2 t)}{[\cosh 3\kappa(x - 12\kappa^2 t) + 3 \cosh \kappa(x - 28\kappa^2 t)]^2}$$

solución que **no** es del tipo de onda viajera y que en $t = 0$ se reduce a la condición inicial,

$$u(x, 0) = -6\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x.$$

Esta solución tiene valores propios $\lambda_1 = -\kappa^2$ y $\lambda_2 = -4\kappa^2$.

Otra forma de abordar el problema. Formulemos la siguiente pregunta: ¿existe potencial $u(x, 0)$, tal que el coeficiente de reflexión sea nulo,

$$R(k, 0) \equiv 0?$$

Para dar respuesta, debemos resolver la ecuación de Gel'fand-Levitan,

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z)F(y + z) dz = 0$$

con

$$F(s) = e^{-\kappa s}.$$

Así,

$$K(x, y) + e^{-\kappa(x+y)} + \int_x^\infty K(x, z)e^{-\kappa(y+z)} dz = 0.$$

Como lo hicimos anteriormente, propongamos un kernel degenerado,

$$K(x, y) = A(x)e^{-\kappa y},$$

por lo que debemos de resolver la ecuación algebraica para $A(x; t)$,

$$A(x) + e^{-\kappa x} + A(x) \int_x^\infty e^{-2\kappa z} dz = 0.$$

Entonces

$$A(x) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y el kernel será

$$K(x, y) = \frac{-2\kappa e^{-\kappa(x+y)}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}},$$

por lo que

$$K(x, x) = \frac{-2\kappa e^{-2\kappa x}}{2\kappa + e^{-2\kappa x}}$$

y

$$\frac{d}{dx} K(x, x) = \kappa^2 \left(\frac{2}{\sqrt{2\kappa} e^{\kappa x} + \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{-\kappa x}} \right)^2.$$

Definiendo δ_0 tal que

$$e^{\delta_0} \equiv \sqrt{2\kappa},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = \\ &= -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta_0). \end{aligned}$$

Aún más, dado que conocemos el kernel $K(x, y)$, podemos conocer las funciones de Jost $f(x, k)$ y $g(x, k)$. La función de Jost $f(x, k)$ es

$$f(x, k) = e^{ikx} - \frac{2\kappa e^{-\kappa x}}{2\kappa + e^{-\kappa x}} \int_x^\infty e^{-(\kappa - ik)y} dy.$$

Integrando y usando $e^{\delta_0} = \sqrt{2\kappa}$ obtenemos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left(1 - \frac{2ik e^{-2\kappa x}}{(e^{2\delta_0} + e^{-2\kappa x})(k + i\kappa)} \right).$$

Multiplicando y dividiendo por $e^{\kappa x - \delta_0}$, sumando y restando $i\kappa e^{\kappa x + \delta_0}$ en el segundo sumando, encontramos

$$f(x, k) = e^{ikx} \left(\frac{k + i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right),$$

¡la cual es una solución sorprendentemente sencilla! Notemos que, en efecto,

$$f(x, k) \sim e^{ikx}, \quad \text{si } x \sim \infty$$

Ahora, sabemos que (ver ecuación (111)):

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k).$$

Para $x \sim -\infty$,

$$g(x, k) \sim a(k) \left(\frac{k + i\kappa}{k - i\kappa} \right) e^{-ikx} + b(k) \left(\frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \right) e^{ikx}.$$

Pero también sabemos que

$$g(x, k) \sim e^{-ikx}, \quad \text{si } x \sim -\infty,$$

para cualquier k . Por tanto,

$$a(k) = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \quad \text{y} \quad b(k) \equiv 0.$$

Entonces, la segunda función de Jost es

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) = e^{-ikx} \left(\frac{k - i\kappa \tanh(\kappa x + \delta_0)}{k + i\kappa} \right).$$

Ahora, sabemos que los valores propios son las raíces de la ecuación

$$a(k) = 0,$$

que en este caso sólo tenemos un valor propio:

$$k = i\kappa$$

Así pues, la función $F(s; t)$ será

$$F(s; t) = c^2(t)e^{-\kappa s}$$

y la ecuación de Gel'fand-Levitan es

$$K(x, y; t) + c^2(t)e^{-\kappa(x+y)} + c^2(t)e^{-\kappa y} \int_x^\infty K(x, z; t)e^{-\kappa z} dz = 0$$

Suponiendo

$$K(x, y; t) = A(x; t)e^{-\kappa y},$$

tenemos

$$A(x; t) + c^2(t)e^{-\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa} A(x; t)e^{-2\kappa x} = 0.$$

Así,

$$A(x; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa x}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}},$$

por lo que el kernel será

$$K(x, y; t) = \frac{-c^2(t)e^{\kappa(x-y)}}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}.$$

Entonces,

$$K(x, x; t) = \frac{-c^2(t)}{e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}}$$

y

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \frac{2\kappa c^2(t)e^{2\kappa x}}{\left(e^{2\kappa x} + \frac{c^2(t)}{2\kappa}\right)^2} = \kappa^2 \left(\frac{2}{\frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)}e^{\kappa x} + \frac{c(t)}{\sqrt{2\kappa}}e^{-\kappa x}} \right)^2$$

Definiendo $\delta(t)$ del siguiente modo:

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)},$$

entonces,

$$\frac{d}{dx}K(x, x; t) = \kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t))$$

por lo que la solución de la ecuación de KdV es

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x + \delta(t)).$$

Ahora, si δ_0 se define como

$$e^{\delta_0} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)},$$

se sigue

$$e^{\delta(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(t)} = \frac{\sqrt{2\kappa}}{c(0)} e^{-4\kappa^3 t} = e^{-4\kappa^3 t + \delta_0},$$

por lo que,

$$\delta(t) = -4\kappa^3 t + \delta_0.$$

Así,

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t + \delta_0).$$

Pero en $t = 0$, $u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa x$, de donde $\delta_0 = 0$ y la solución de la ecuación de Korteweg-deVries resulta ser

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t),$$

y la constante de normalización

$$c(0) = \sqrt{2\kappa}$$

es la misma que antes. La velocidad de propagación del soliton es

$$\text{Velocidad de propagación} = 4\kappa^2,$$

y como vemos es proporcional a la amplitud

$$\text{Amplitud} = -2\kappa^2.$$

Así, los solitones más altos son los solitones más rápidos.

3.15 ¿Qué hace el Espectro Continuo?

En la sección anterior vimos un ejemplo en que el coeficiente de reflexión es nulo, $R(k) \equiv 0$, pero en general tendremos potenciales en los que dicho coeficiente sea distinto de cero:

$$R(k) \neq 0.$$

Lamentablemente, y a pesar de ser una ecuación lineal, la ecuación de Gel'fand-Levitan *no* podrá ser resuelta explícitamente en la mayoría de los casos.

Veamos qué sucede si la condición inicial es

$$u(x, 0) = -\nu(\nu + 1) \operatorname{sech}^2 x.$$

donde ν *no* es un entero. Aquí, los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\nu - (N - 1))^2, \\ \lambda_2 &= -(\nu - (N - 2))^2, \\ &\vdots \\ \lambda_N &= -\nu^2, \end{aligned}$$

donde N es el máximo entero tal que $N < \nu + 1$. (Ver la nota al final de esta sección).

Si por ejemplo $\nu = 0.5$, entonces el perfil inicial tiene amplitud

$$A_i = \nu(\nu + 1) = 0.75.$$

Aquí $N = 1$ y el solitón correspondiente al valor propio $\lambda_1 = -\kappa_1^2 = -\nu_1^2 = -0.25$, tiene amplitud

$$A_1 = 2\kappa_1^2 = 0.5.$$

Notemos que la amplitud inicial es mayor que la amplitud del solitón en cualquier otro instante posterior:

$$A_i > A_1.$$

Y esto es debido a que parte de la amplitud se pierde en **radiación**, debido a que el coeficiente de reflexión **no** es idénticamente cero: $R(k, 0) \neq 0$.

Vemos que efectivamente en este caso $R(k) \neq 0$, pues:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 \sim \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\pi$$

lo cual no necesariamente vale *cero*.

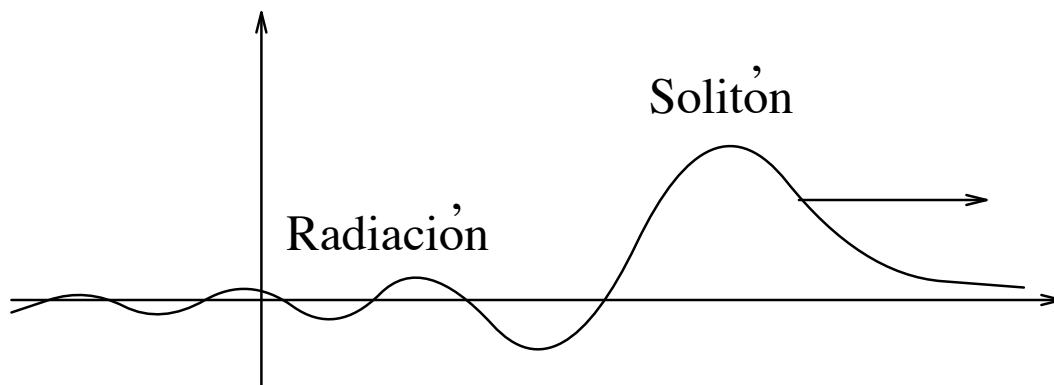


Figure 17: Continuous spectrum: radiation

Nota. Los valores propios están dados por los polos del coeficiente de reflexión:

$$|R(k)|^2 = \left| \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \right|^2 = \left| \frac{b(k)}{a(k)} \right|^2$$

Por tanto, los polos de $|R(k)|^2$ son los polos de $\Gamma(\alpha)$ y $\Gamma(\beta)$, los cuales son los siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha &= -ik - \nu = -n, \\ \beta &= -ik + (\nu + 1) = -m,\end{aligned}$$

donde $m, n = 0, 1, 2, \dots$. Así,

$$k = i(\nu - m) \quad \text{ó} \quad k = -i(n + \nu + 1).$$

Pero como pedimos $\text{Im}(k) > 0$,

$$\begin{aligned}\nu - m &> 0, \\ n + \nu + 1 &> 0,\end{aligned}$$

los valores propios son

$$\begin{aligned}\lambda_{M+1} &= -\nu^2, \\ \lambda_M &= -(\nu - 1)^2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= -(\nu - M)^2,\end{aligned}$$

donde M es un entero tal que $\nu - M > 0$. Esto es, M es el máximo entero menor que ν . Si definimos

$$M \equiv N - 1,$$

entonces:

$$N < \nu + 1,$$

como deseabamos verificar. *Fin de la nota.*

3.16 Apéndice A.

Aquí probaremos que los valores propios de la ecuación de Schrödinger son reales.

Tomemos la ecuación de Schrödinger y también su conjugada:

$$\begin{aligned}\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi &= 0 \\ \psi_{xx}^* + (\lambda^* - u)\psi^* &= 0,\end{aligned}$$

donde el asterisco denota conjugación. El potencial $u = u(x, t)$ es real, por ser la amplitud de nuestra onda. Multiplicando la primera de nuestras ecuaciones por ψ^* y la segunda por ψ y restando,

$$\psi^* \psi_{xx} - \psi_{xx}^* \psi + (\lambda - \lambda^*) \psi \psi^*$$

de donde

$$\frac{d}{dx}(\psi^* \psi_x - \psi_x^* \psi) + (\lambda - \lambda^*) |\psi|^2 = 0. \quad (151)$$

Tenemos ahora dos casos:

a) $\text{Im}(k) = 0$. Entonces $\lambda = k^2$ es real y positivo y corresponde al espectro continuo.

b) $\text{Im}(k) > 0$. Tomemos, por ejemplo, $\psi(x, k) = g(x, k)$ (se hace de igual forma para $\psi(x, k) = f(x, k)$). Como $g(x, k) \sim e^{-ikx}$ cuando $x \sim -\infty$ y $e^{-ikx} \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$ (pues $\text{Im}k > 0$), entonces

$$g(x, k) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty.$$

Sabemos que

$$g(x, k) = a(k)f^*(x, k) + b(k)f(x, k),$$

entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik^*x} + b(k)e^{ikx} \quad \text{cuando } x \sim \infty.$$

Sea $k = k_1 + i\kappa$, con $\text{Im}(k) = \kappa > 0$. Entonces

$$g(x, k) \sim a(k)e^{-ik_1x - \kappa x} + b(k)e^{ik_1x - \kappa x} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty.$$

Por tanto,

$$|g(x, k)|^2 \rightarrow 0$$

exponencialmente, cuando $|x| \rightarrow \infty$.

De aquí que al integrar la ecuación (151), desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el término de frontera se anule,

$$(g^*g_x - g_x^*g)|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

pues $|g| \rightarrow 0$, cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces:

$$(\lambda - \lambda^*) \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx = 0$$

Ahora, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x, k)|^2 dx$ es convergente, pues $|g| \rightarrow 0$ exponencialmente, para $|x| \rightarrow \infty$. Además es distinta de cero, pues buscamos soluciones no triviales. Entonces

$$\lambda = \lambda^*$$

i.e., λ es real y es lo que deseábamos probar.

Ahora,

$$\lambda = k^2 = k_1^2 - \kappa^2 + 2ik_1\kappa$$

Como λ es real, $k_1\kappa = 0$. Pero $\kappa = \text{Im}k > 0$. Así $k_1 = 0$, $\lambda = -\kappa^2 < 0$ y $k = i\kappa$. Así pues, tenemos que si $\text{Im}k > 0$, entonces $k = i\kappa$, con $\kappa = \text{Im}k > 0$ y corresponde al caso discreto, por ser $\lambda < 0$, esto es, tener energía negativa.

3.17 Apéndice B.

El Wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Schrödinger, es una constante independiente de x .

Sean ψ_1 y ψ_2 soluciones linealmente independientes a la ecuación de Schrödinger,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 + (k^2 - u)\psi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 + (k^2 - u)\psi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones por ψ_2 , la segunda por ψ_1 y restando obtenemos

$$\psi_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_2 = 0$$

que podemos escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi_2 \frac{\partial}{\partial x} \psi_1 - \psi_1 \frac{\partial}{\partial x} \psi_2 \right) = 0$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} (W(\psi_1, \psi_2)) = 0.$$

Y así,

$$W(\psi_1, \psi_2)(x, k) = W(\psi_1, \psi_2)(0, k)$$

es una constante (*i.e.*, independiente de x pero puede depender de k).

Si por ejemplo $\psi_1 = f(x, k)$, $\psi_2 = g(x, k)$, entonces

$$\begin{aligned} W(f, g) &= W(f, af^* + bf), \\ &\sim W(e^{ikx}, ae^{-ikx} + be^{ikx}), \end{aligned}$$

en $x \sim \infty$. Así,

$$W(f, g) \sim \begin{pmatrix} e^{ikx} & ae^{-ikx} + be^{ikx} \\ ik e^{ikx} & -ika e^{-ikx} + ikb e^{ikx} \end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$W(f, g) = -2ika(k). \quad (152)$$

3.18 Apéndice C.

Probaremos que

$$\frac{d}{dk} a(k_0) = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx,$$

donde $k_0 = i\kappa_0$ corresponde a un valor propio.

Prueba. Sabemos que (ver ecuación (152)):

$$W(f, g) = -2ika(k).$$

Calculando la derivada en ambos miembros de la ecuación respecto a k ,

$$\frac{d}{dk} W(f, g) = -2ia(k) - 2ik \frac{d}{dk} a(k). \quad (153)$$

Ahora, la derivada respecto a k en ambos miembros de la ecuación de Schrödinger es:

$$\frac{d}{dk} f_{xx} + (k^2 - u) \frac{d}{dk} f + 2kf = 0. \quad (154)$$

También tenemos

$$g_{xx} + (k^2 - u)g = 0. \quad (155)$$

Multiplicando (154) por g , (155) por $\frac{df}{dk}$ y tomando la diferencia obtenemos

$$g_{xx} \frac{df}{dk} - g \frac{d}{dk} f_{xx} - 2kfg = 0.$$

Así,

$$2kfg = \frac{d}{dx} \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] \quad (156)$$

Intercambiando los papeles de f y g en (156), obtenemos:

$$2kfg = \frac{d}{dx} \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right] \quad (157)$$

Integrando (156) desde algún punto x_0 hasta l y (157) desde $-l$ hasta x_0 ,

$$2k \int_{x_0}^l (fg) dx = \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l, \quad (158)$$

$$2k \int_{-l}^{x_0} (fg) dx = \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0}. \quad (159)$$

Ahora, en $k = k_0 = i\kappa_0$, ($\kappa_0 > 0$), sabemos

$$g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0),$$

con

$$\begin{aligned} g(x, k_0) &\rightarrow 0, \\ f(x, k_0) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right]_{x_0}^l &= - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right]_{-l}^{x_0} &= \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (158) y (159) se escriben

$$2k_0 \int_{x_0}^{\infty} (fg) dx = - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0),$$

$$2k_0 \int_{-\infty}^{x_0} (fg) dx = \left[W \left(\frac{dg}{dk}, f \right) \right] (x_0, k_0).$$

Sumando miembro a miembro,

$$2k_0 \int_{-\infty}^{\infty} (fg) dx = - \left[W \left(\frac{df}{dk}, g \right) \right] (x_0, k_0) - \left[W \left(f, \frac{dg}{dk} \right) \right] (x_0, k_0)$$

$$= - \frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0)$$

Usando el hecho que $g(x, k_0) = \rho_0 f(x, k_0)$:

$$\frac{d}{dk} [W(f, g)](x_0, k_0) = -2k_0 \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

Comparando con (153) evaluada en $k = k_0$ y recordando que $a(k_0) = 0$, tenemos

$$\frac{d}{dk} a(k_0) = -i\rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx$$

como deseábamos probar.

Además, como $f(x, k_0) \not\equiv 0$, entonces $f^2(x, k_0) \not\equiv 0$ y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx \neq 0$, por lo que

$$\frac{d}{dk} a(k_0) \neq 0,$$

y así

$$a(k) = 0$$

tiene ceros simples.

3.19 Apéndice D.

Aquí probaremos la igualdad

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right),$$

donde

$$Q \equiv \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_x \psi - 2(u + 2\lambda) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

y

$$\lambda = k^2(t).$$

es válida.

Prueba: Calculemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = Q \psi_{xx} - \psi Q_{xx}$$

Pero para ello necesitamos conocer

$$\begin{aligned} Q_x &= \psi_{xt} + u_{xx} \psi - u_x \psi_x - 2(u + 2\lambda) \psi_{xx}, \\ Q_{xx} &= \psi_{xxt} + u_{xxx} \psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda) \psi_{xxx}, \end{aligned}$$

Usando $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$ en la expresión para Q_{xx} tenemos

$$Q_{xx} = (u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x \psi + (u - \lambda)\psi_x].$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= Q \psi_{xx} - \psi Q_{xx} \\ &= [\psi_t + u_x \psi - 2(u + 2\lambda)\psi] \psi_{xx} \\ &\quad - \psi \{ (u_t - \lambda_t)\psi + (u - \lambda)\psi_t + u_{xxx}\psi \\ &\quad - 3u_x \psi_{xx} - 2(u + 2\lambda)[u_x \psi + (u - \lambda)\psi_x] \}. \end{aligned}$$

Arreglando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= \psi_{xx} [\psi_t - 2(u + 2\lambda)\psi_x] - \psi (u_{xxx}\psi - 4u_x \psi_{xx}) \\ &\quad + \psi [(\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t] \\ &\quad + 2\psi (u + 2\lambda) [u_x \psi + (u - \lambda)\psi_x]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la ecuación de Schrödinger $\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right) &= -\psi^2 u_{xxx} + 4(u - \lambda)u_x \psi^2 - (u_t - \lambda_t)\psi^2 + 2\psi^2(u + 2\lambda)u_x \\ &= \psi^2[-u_{xxx} - u_t + 6u u_x + \lambda_t]. \end{aligned}$$

Como se cumple la ecuación de KdV, entonces

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

como queríamos probar.

4 Bäcklund transforms

4.1 Introductory remarks

Bäcklund transforms were named after Swedish mathematician Albert Viktor Bäcklund (1845 - 1922). The Bäcklund transform relates solutions of two partial differential equations (the most interesting are the nonlinear partial differential equations - PDEs). If two PDEs are the same, it is termed *auto-Bäcklund transforms*.

The origins of the Bäcklund transforms go back to the work of Bianchi and Bäcklund in the early 1880s. They were interested on finding 2-dimensional surfaces of negative constant curvature. If it is known a surface of negative, constant curvature, they were able to find another surface with the same property.

This has a broad application in soliton theory. if one has a soliton PDE and we know a particular solution of the PDE, the Bäcklund transform can generate a new solution to the PDE. It is customary that all soliton equations have their corresponding Bäcklund transformation.

4.2 The most elementary Bäcklund transform

The Cauchy-Riemann equations

The Cauchy-Riemann equations are the simplest example of a Bäcklund transform,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

We know that if u solves the Laplace equation,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

then $u(x, y)$ is the real part of a function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ which is analytic in the complex variable $z = x + iy$. Then, the Cauchy-Riemann equations hold, and they form a system of linear equations for $v(x, y)$, which is the imaginary part of $f(z)$ and solves,

$$v_{xx} + v_{yy} = 0,$$

so we have found another solution of the Laplace equation. This is to say, the Cauchy-Riemann equations are the Bäcklund transform for the Laplace equations. In fact, they are an auto-Bäcklund transform, this is to say, connects solutions to the Laplace equation to the Laplace equation.

As an example, consider the solution $u(x, y) = x^2 - y^2$ to the Laplace equation. Substitute into the Cauchy-Riemann equations and we find $v(x, y) = 2xy$ which also solves the Laplace equation. We can repeat this procedure to higher degree polynomial solutions as well to other type of solutions to the Laplace equation.

The sine-Gordon equation

The sine-Gordon equation,

$$u_{xy} = \sin u,$$

appears in the context of constant, negative curvature surfaces and soliton theory, and even that this example is not elementary, it appeared in the work of V. Bäcklund. It has an auto-Bäcklund transformation given by the system:

$$v_x = u_x + 2a \sin\left(\frac{u+v}{2}\right), \quad (160)$$

$$v_y = -u_y - \frac{2}{a} \sin\left(\frac{u-v}{2}\right), \quad (161)$$

where a is an arbitrary parameter. If we know that $u(x, y)$ solves the sine-Gordon equations, then, solve the previous system of first order system equations for $v(x, y)$ and we will discover that

$$v_{xy} = \sin v.$$

The Liouville equation

The Liouville equation is

$$u_{xy} = e^u.$$

The Bäcklund transform for the Liouville equation is given by the system

$$v_x = u_x + 2ae^{\left(\frac{u+v}{2}\right)}, v_y = -u_y - \frac{1}{a}e^{\left(\frac{u-v}{2}\right)},$$

where a is again a free parameter. This system connects the Liouville equation to the wave equation

$$v_{xy} = 0.$$

So, if we solve the wave equation, solving the corresponding Bäcklund transform, we are able to find solutions to Liouville equation.

4.3 Second order eigenvalues problems and systems of first order equations

The rest of this chapter is based on *Elements of Soliton Theory* by George L. Lamb, Jr. [Lam].

The system of equations

$$\partial_x \Psi = (iED + N)\Psi,$$

$$E = \text{spectral parameter}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

where $q = q(x)$ and $r = r(x)$. (If $r = \pm q^*$, $q = u$, this corresponds to the eigenvalue problem associated to the nonlinear Schrödinger (NLS) equation for u). Explicitly,

$$\begin{aligned} \partial_x \psi_1 &= -iE\psi_1 + q\psi_2, \\ \partial_x \psi_2 &= iE\psi_2 + r\psi_1. \end{aligned} \tag{162}$$

Define ϕ_1 and ϕ_2 such that

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2}(\phi_1 + i\phi_2), \\ i\psi_2 &= \frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2).\end{aligned}\tag{163}$$

Take $r = -q$. (If $q = u$, we get the modified KdV (mKdV) equation for u . If $u = q_x/2$, we get the sine-Gordon equation for u). Then system (163) with (163) becomes

$$\begin{aligned}\partial_x \phi_1 &= E\phi_1 - iq\phi_2, \\ \partial_x \phi_2 &= -E\phi_2 + iq\phi_1.\end{aligned}\tag{164}$$

Computing second derivatives and doing some algebra, we find the uncoupled system

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \phi_1 + (E^2 + iq_x - q^2)\phi_1 &= 0, \\ \partial_x^2 \phi_2 + (E^2 - iq_x - q^2)\phi_2 &= 0.\end{aligned}\tag{165}$$

This means we can associated second order equations to first order eigenvalue problems.

If $q = u$, $r = -1$, again computing second derivatives, the system (163) can be taken into the system,

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \psi_2 + u\psi_2 &= -E^2\psi_2, \\ \partial_x^2 \psi_1 + u\psi_1 &= -E^2\psi_1 + u_x\psi^2.\end{aligned}$$

The first equation is an eigenvalue problem of second order, actually, it is the stationary Schrödinger equation. The second equation is not properly an eigenvalue problem.

4.4 Relation between one- and two-component systems and Ricatti equations

We previously started with system (164). Multiply first equation by ϕ_2 , the second by ϕ_1 subtract member to member; then divide by ϕ_2^2 . We observe a differentiation quotient rule and define

$$\varphi \equiv \frac{\phi_1}{\phi_2}, .$$

We obtain an equation for φ

$$\partial_x \varphi = E(1 + \varphi^2) - 2iq\varphi,$$

which is a Riccati equation for φ . Now let $\varphi = -\frac{\partial_x \theta}{E\theta}$. We get,

$$-\partial_x^2 \theta = E^2 \theta + 2iq\partial_x \theta,$$

which is a linear equation for θ ! (which in principle can be solved). Now set $\theta = \phi \exp(-i \int q(x) dx)$. We obtain,

$$\partial_x^2 \phi_2 + (E^2 - iq_x - q^2)\phi_2 = 0.$$

which is equation (165) that we previously found.

This way of going from a first order system to a second order eigenvalue problem could seem more complicated. However, passing through the Riccati equation is a crucial step, since the Riccati equation appears many times in the analysis of Bäcklund transforms.

Just an aside comment. Going back from the Riccati equation to the first order system is more subtle but it can be done.

4.5 General properties of Riccati equations

We start from the general Riccati equation

$$\phi_x + A\phi + B\phi^2 = C, \tag{166}$$

where $A = A(x)$, $B = B(x)$ and $C = C(x)$. Define $\theta = \theta(x)$,

$$\varphi = \frac{\theta_x}{B\theta}.$$

Substitute into the Riccati equation to get a linear equation in θ .

$$\partial_x^2 \theta + \left(A - \frac{B_x}{B} \right) \partial_x \theta = BC\theta,$$

which in principle can be solved. If $\theta_1(x)$ and $\theta_2(x)$ are two linearly independent solutions, the general solution is given by $\theta(x) = a\theta_1(x) + b\theta_2(x)$. From this ($b \neq 0$),

$$\varphi(x) = \frac{\frac{a}{b}\partial_x \theta_1(x) + \partial_x \theta_2(x)}{B(x) \left(\frac{a}{b}\theta_1(x) + \theta_2(x) \right)}$$

is a solution of the Riccati equation. We can then impose a general solution for the Riccati equation of the following form:

$$\varphi(x) = \frac{kP(x) + Q(x)}{kR(x) + S(x)},$$

with k the constant of integration.

Similarly, it can be shown that if φ_1 and φ_2 are solutions of the Riccati equation, a new solution φ can be found by solving the following relation

$$\frac{\varphi - \varphi_1(x)}{\varphi - \varphi_2(x)} = K \exp \left(\int B(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) dx \right),$$

being k a constant of integration.

We have a final comment. The equation $\partial_{xx}^2 \theta + a(x)\partial_x \theta + b(x)\theta = 0$ can be taken, through the transformation,

$$\theta = \phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int a(x) dx \right),$$

into the equation

$$\partial_x^2 \phi + \left(b - \frac{1}{4}(a^2 + 2a_x) \right) \phi = 0.$$

Under some choices of a and b , this can be the stationary Schrödinger equation.

4.6 Associated Sturm-Liouville equations

The equation

$$-\partial_x^2 \psi + V(x)\psi = \lambda\psi,$$

is the stationary Schrödinger equation and it is of fundamental importance in quantum mechanics and soliton theory. In fact, soliton theory adopted the ideas and techniques from quantum mechanics to solve its own problems.

One of these problems is to solve this equation for reflectionless potentials to find pure soliton solutions to the KdV equation.

How to find reflectionless solutions by direct methods was adopted by Darboux (1882) and many others. Here, we follow the procedure of Darboux, according to Lamb [Lam].

Assume there is a connection in between the following eigenvalue problems:

$$y'' = (\lambda + u(x))y, \tag{167}$$

$$z'' = (\lambda + v(x))z. \tag{168}$$

Assumed the solutions are related by:

$$z = A(x, \lambda)y + B(x, \lambda)y'. \tag{169}$$

For the sake of simplicity, take $B(x, \lambda) = 1$.

Equation (169) will be of fundamental importance since it will allow us to find further solutions to nonlinear equations.

Substituting (169) into (168), then using (167), and then considering that λ is x -independent, grouping terms as factors in y and y' , and assuming y and y' are linearly independent, we get the system:

$$A'' + A(u - v) + u' = 0, \quad (170)$$

$$2A' + (u - v) = 0. \quad (171)$$

Multiply (171) by A , subtracting from (170), and integrate to get:

$$A' - A^2 = u = -\tilde{\lambda},$$

with $\tilde{\lambda}$ is the constant of integration. Linearizing by

$$A = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}},$$

to get

$$\tilde{y}'' (\tilde{\lambda} + u(x)) \tilde{y}, \quad (172)$$

i.e., \tilde{y} is a particular solution to (167)!

From (171), $v = u + 2A' = u - 2 \left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} \right)'$, *i.e.*,

$$v = u - 2 (\text{Log } \tilde{y})'',$$

so that z solves the eigenvalue problem

$$z'' = [\lambda + u - 2 (\text{Log } \tilde{y})''] z. \quad (173)$$

We obtained a Schrödinger equation with a new potential

$$u(x) \longrightarrow u(x) - 2 (\text{Log } \tilde{y}(x))''.$$

Now, by the identity $2 (\text{Log } f)'' = \frac{f''}{f} - f \left(\frac{1}{f} \right)''$, and using equation (172), $z'' =$
i.e., $\left[\lambda + u - \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}} + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z = \left[\lambda + u - (\tilde{\lambda} + u) + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z = \left[\lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z,$

$$z'' = \left[\lambda - \tilde{\lambda} + \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' \right] z. \quad (174)$$

Notice that a solution of (174), whenever we choose $\tilde{\lambda} = \lambda$, is $z = \frac{1}{\tilde{y}}$. I.e., (174) becomes:

$$\frac{z''}{z} = \tilde{y} \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)''.$$

This allows to find initial conditions for pure soliton solutions of the KdV equation. This is how it works.

Procedure. Given a potential $u(x)$, find a solution $\tilde{y}(x)$ to

$$\tilde{y}'' (\tilde{\lambda} + u(x)) \tilde{y},$$

for a particular value of $\tilde{\lambda}$. Then, a new solution (with a new potential) to

$$y'' (\lambda + u(x)) y,$$

can be found through equation (173),

$$z'' = [\lambda + u - 2 (\text{Log } \tilde{y})'] z.$$

and the new potential is

$$u_{\text{new}}(x) = u - 2 (\text{Log } \tilde{y})'', \quad (175)$$

with $z = A(x, \tilde{\lambda})y + B(x, \tilde{\lambda})y' = -\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}y + y'$. The new potential is the new initial condition to the KdV equation.

Example 4.1. *Initial conditions to the KdV equation.* Consider the equation

$$y'' = (\lambda + u(x))y,$$

with $u(x) = 0$. Notice that the KdV equation, $u_t - 6uu_x + u_{xxx}$ has as an exact solution, $u(x, t) = 0$ for which $u(x) = 0$ corresponds to its initial condition. WE are going to generate the initial condition for the 1-soliton solution.

Then, the previous equation becomes, $y'' = \lambda y$ and has the general solution

$$y(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Take $\lambda = \tilde{\lambda} = 1$, $\alpha = \beta = 1/2$:

$$\tilde{y}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Hence, by (175) $u_{\text{new}} = 0 - 2(\text{Log } \tilde{y})'' = -2\left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}\right)' = -2\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = -2\left(\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}\right)$,
i.e.,

$$u_{\text{new}}(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x.$$

which is the initial condition for the one-soliton solution of the KdV equation.

Now, the solution to the initial value problem

$$z'' = (\lambda - 2 \operatorname{sech}^2 x)z,$$

is given by $z = y' - \left(\frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}\right)y = \alpha\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - \beta\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x} - (\alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x})\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, *i.e.*,

$$z(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} - \operatorname{th} x) - \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}(\sqrt{\lambda} + \operatorname{th} x).$$

This procedure can be repeated iteratively as many times as we want.

4.7 Bäcklund transform for the KdV equation

In the previous section, we learnt how to generate initial conditions to the KdV equations such that they evolve as pure N -soliton solutions. Here, we find such N -soliton solutions out of the $(N - 1)$ -soliton solution. To this end, we require a system of two Sturm-Liouville eigenvalue problems, such that the potential also depend on the time t , where here it is a parameter.

Hypothesis. The eigenvalue λ of this system of Sturm-Liouville eigenvalue problems is t -independent.

We then have two Sturm-Liouville eigenvalue problems

$$y_{xx} = [\lambda + \varphi(x, t)]y, \quad (176)$$

$$w_{xx} = [\lambda + \psi(x, t)]w; \quad (177)$$

they share the same eigenvalue, λ , and $\varphi(x, t)$ and $\psi(x, t)$ are assumed to solutions of the KdV equation.

The solutions $y(x, t)$, $w(x, t)$ of these equations are related by

$$w(x, t) = A(x, t; \lambda)y + y'. \quad (178)$$

As we found in the previous section,

$$2A_x + \varphi - \psi = 0, \quad (179)$$

$$A^2 - A_x - \varphi = \tilde{\lambda}(t), \quad (180)$$

where $\tilde{\lambda}(t)$ is a constant of integration, so might depend on t . Linearizing (180) with $A = -\tilde{y}_x/\tilde{y}$, we get.

$$\tilde{y}_{xx} = (\tilde{\lambda}(t) + \varphi)\tilde{y}.$$

Since $\varphi(x, t)$ solve the KdV equation, $\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\lambda}$ is time-independent.

Define z and ζ such that $\psi = z_x$ and $\varphi = \zeta_x$. Integrating (179) and setting the constant of integration equal to zero,

$$A = \frac{1}{2}(z - \zeta). \quad (181)$$

Substitute A_x from equation (179) into (180), we get

$$A^2 = \tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(\psi + \varphi). \quad (182)$$

Now, substitute (181) into (182) and rearranging terms,

$$\psi + \varphi = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2. \quad (183)$$

This is a Riccati type of equation that relates the functions z and ζ , which are related to the solutions $\psi = z_x$ and $\varphi = \zeta_x$, solutions to the KdV equation.

Claim 4.1. *If $\psi(x, t)$ satisfies the KdV equation*

$$\psi_t - 6\psi\psi_x + \psi_{xxx} = 0, \quad (184)$$

then

$$z_t - 3(z_x)^2 + z_{xxx} = 0, \quad (185)$$

$$\zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} = 0. \quad (186)$$

With the help of this claim, an evolution equation for z and ζ can be found. The starting point is to differentiate member to member equation (183) and, after a lengthy and not so obvious procedure, we get $z_t + \zeta_t = 2(z_x^2 + z_x\zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx})$. This equation together with equation (183) conform the Bäcklund transform for the KdV equation:

$$\begin{aligned} z_x + \zeta_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2, \\ z_t + \zeta_t &= 2(z_x^2 + z_x\zeta_x + \zeta_x^2) - (z - \zeta)(z_{xx} - \zeta_{xx}). \end{aligned} \quad (187)$$

This is how it works. Find a solution $\zeta(x, t)$ to (186) and substitute into (187). We then have a system of two coupled equations for $z(x, t)$. Solve it, and $\psi(x, t) = \partial_x z$ is a solution to the KdV equation.

Example 4.2. *The 1-soliton solution of the KdV equation.* Notice that $\zeta(x, t) = 0$ solves (186),

$$\zeta_t - 3(\zeta_x)^2 + \zeta_{xxx} = 0.$$

Now, substitute into the Bäcklund transform for the KdV equation (187) to get,

$$\begin{aligned} z_x &= -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2, \\ z_t &= 2z_x^2 - zz_{xx}. \end{aligned}$$

Differentiating the first equation and substituting into the second,

$$z_x = -2\tilde{\lambda} + \frac{1}{2}z^2, \quad (188)$$

$$z_t = -4\tilde{\lambda}z_x. \quad (189)$$

Letting $\tilde{\lambda} = \kappa^2$ ($\kappa > 0$), and solving (188) by partial fractions, we get

$$\left| \frac{z - 2\kappa}{z + 2\kappa} \right| = e^{2\kappa(x-x_0)},$$

where x_0 is the constant of integration. There are now two cases, $2\kappa < |z|$ and $|z| < 2\kappa$. Solving for z in these both cases,

$$z_1(x) = -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \quad (190)$$

$$z_2(x) = -2\kappa \tanh \kappa(x - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \quad (191)$$

Now solving (189), $z(x, t) = f(x - 4\tilde{\lambda}t) = f(x - 4\kappa^2t)$, to get

$$z_1(x, t) = -\frac{2\kappa}{\tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)}, \quad \text{for } 2\kappa < |z_1|, \quad (192)$$

$$z_2(x, t) = -2\kappa \tanh \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0), \quad \text{for } |z_2| < 2\kappa. \quad (193)$$

Now, since $\psi_2(x, t) = \partial_x z_2$, then

$$\psi_2(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - 4\kappa^2t - x_0)$$

is the 1-soliton solution of the KdV equation.

We can construct more evolved solutions, such a 2-soliton or N -soliton solutions, we can also use the permutation theorem to find a bit easier to find N -soliton solutions.

Bibliography

- [BBT] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon, *Introduction to Classical Integrable systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. **53** (2007).
- [Google1] Lax representation of the harmonic oscillator:
<http://physics.stackexchange.com/questions/182589/lax-representation-of-the-harmonic-oscillator>
- [L1] P. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolutions and solitary waves*. Communications on Pure and Applied Mathematics. **XXI**. 467-490 (1968).
- [L2] P. Lax, *Periodic solutions of the KdV equation*. Communications on Pure and Applied Mathematics. **XXVIII**. 141-188 (1975).
- [GGKM] C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal and R. Miura, *A Method for Solving the Korteweg-De Vries Equation*. Phys. Rev. Letters, **19** (1967) 1095.
- [Dra] P.G. Drazin and R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [Fla] H. Flaschka. *Notes on Soliton theory (Personal communication.)*
- [To1] M. Toda, *Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction*. Journal of the Physics Society of Japan. **22**, 1967.
M. Toda, *Wave Propagation in Anharmonic Lattices*. Journal of the Physics Society of Japan. **23**, 1967.
- [To2] M. Toda, *Nonlinear waves and Solitons*. Mathematics and its applications. (Japanese Series), KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989.
- [Kac] M. Kac. (April 1966). *Can One Hear the Shape of a Drum?*. American Mathematical Monthly. 73 (4, part 2).
- [Gor1] Gordon, C; Webb, D, *You can't hear the shape of a drum*, American Scientist, 84 (January?February): 46?55.
- [Gor2] Gordon, C.; Webb, D.; Wolpert, S. (1992), *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae, 110 (1): 1?22,
- [Sco] A.S. Scott. *The development of nonlinear Science*. Rivista del Nuovo Cimento, vol. **27**, Issue 10, p.1-115.

- [KdV] Korteweg, D. J.; de Vries, G. (1895), *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves*, *Philosophical Magazine*, **39** (240): 422-443,
- [AKNS] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems*. *Studies in Applied Mathematics*. **53** (1974) 249-315
- [AKNS2] M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell and H. Segur, *Method of Solution for the Sine-Gordon Equation*. *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1262-1264.
- [AS] M. Ablowitz and H. Segur *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, Philadelphia, 1981.
- [APT] M. Ablowitz, B. Prinari, and A.D. Trubatch. *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger systems*. Cambridge University Press. 2004.
- [GL] Gel'fand, I. M. y B. M. Levitan. *On the determination of a differential equation from its spectral function*. *American Mathematical Translations* (2). **1**: 253-304. (1951).
- [Lam] G.L. Lamb, Jr. *Elements of soliton theory*. John Wiley & Sons. 1980.
- [NSS] Nagle, Saff and, Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6th Edition. Addison-Wesley. 2012.
- [Miu] R.M. Miura, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation*, *J. Math. Phys.* **9**, 1202-1204 (1968).
- [CH] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. Wiley Classics Library. Wiley Interscience. 1953.
- [Lev] Levedev. *Special functions and their applications*. Dover Books. 1965.
- [LL3] L.D: Landau and E.M. Lifshitz *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*. Course of Theoretical Physics Vol. 3. Elsevier Science. 2003.
- [Lam] G.L. Lamb, Jr. *Elements of Soliton Theory* . John Wiley & Sons. 1980.